

УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ
ЧЕРКАСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ
КОМУНАЛЬНИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД «ЧЕРКАСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ
ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ ОСВІТИ ПЕДАГОГІЧНИХ
ПРАЦІВНИКІВ ЧЕРКАСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ РАДИ»

Методичний кейс: компетентнісно орієнтовані завдання з математики для 9 класу НУШ

Посібник для вчителя

Черкаси

2026

УДК 373.5.016:51

М 54

Рекомендовано до друку Вченою радою КНЗ «ЧОПОПП Черкаської обласної ради». Протокол № 1 від 02.03.2026 року

АВТОР-УКЛАДАЧ:

Тищенко І.А., методист математики лабораторії природничо-математичних дисциплін комунального навчального закладу «Черкаський обласний інститут післядипломної освіти педагогічних працівників Черкаської обласної ради»

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Норкіна О.В., доцент кафедри дошкільної освіти та професійного розвитку педагогів, комунального навчального закладу «Черкаський обласний інститут післядипломної освіти педагогічних працівників Черкаської обласної ради», кандидат педагогічних наук;

Глизь Н.М., заступник директора з навчально-виховної роботи, учитель математики Руськополянського закладу загальної середньої освіти І-ІІІ ступенів №1 Руськополянської сільської ради

М 54 Бедусенко О.С., Волкова К.М., Гонза В.Є., Кузьменко Л.О., Лесик О.К., Лискова С.М., Науменко І.М., Озірська С.І., Тищенко І.А., Черненко О.П. Методичний кейс: компетентісно орієнтовані завдання з математики для 9 класу НУШ. Посібник для вчителя /Автор-уклад. І.А.Тищенко. Черкаси: ЧОПОПП, 2026. 279 с.

Збірник став результатом роботи обласної творчої групи вчителів математики протягом 2025-2026 навчального року. У навчально-методичному посібнику представлений дієвий інструментарій (методичний кейс) для формування ключових і предметних математичних компетентностей в учнів Нової української школи шляхом впровадження до освітнього процесу комплексних, практико-орієнтованих та міждисциплінарних завдань, що моделюють реальні життєві ситуації, сприяючи глибокому розумінню математичних понять, розвитку критичного мислення та застосуванню набутих знань для розв'язання типових проблем. Розроблені 48 авторських компетентісно орієнтованих завдань (кейсів) з математики для учнів 9-го класу охоплюють усі змістові лінії навчальної програми НУШ. До кожного завдання створені детальні методичні рекомендації для вчителя, що включають: очікувані результати навчання (згідно з НУШ), перелік компетентностей, що формуються, повне розв'язання, критерії оцінювання та можливі варіанти диференціації; розроблені алгоритми (покрокові інструкції) для вчителів щодо впровадження кейс-методу на уроках математики, включаючи етапи роботи з кейсом та формати організації групової / парної роботи

Методичний посібник створений на допомогу вчителям, які працюватимуть за новим Державним стандартом базової середньої освіти та модельними навчальними програмами в другому циклі базової середньої освіти — базове предметне навчання (7-9 класи) Нової української школи.

© КНЗ «ЧОПОПП Черкаської обласної ради», 2026

ЗМІСТ

ВСТУП. МАТЕМАТИКА ДЛЯ НУШ: СТВОРЮЄМО ЗАВДАННЯ, ЩО РОЗВИВАЮТЬ КРИТИЧНЕ МИСЛЕННЯ	6
РОЗДІЛ 1. АЛГЕБРАЇЧНИЙ ВСЕСВІТ: ВІД ПРОСТОГО ДО СКЛАДНОГО	17
1.1. Нерівності: межі можливого.....	18
1.1.1. Екологічна логістика: обираємо транспорт для бізнесу.....	18
1.1.2. Вибір інтернет провайдера.....	24
1.1.3. Планування раціону спортсмена.....	28
1.1.4. Перевезення вантажу.....	34
1.2. Квадратична функція: вершина рішень	38
1.2.1. Проектування безпечного скейт-парку.....	38
1.2.2. Сонячні панелі: де енергія працює на максимум?.....	43
1.2.3. Оптимальний режим нагріву електрочайника.....	51
1.3. Квадратні нерівності: логіка інтервалів.....	58
1.3.1. Бізнес-ідея: прокат електросамокатів у місті.....	58
1.3.2. Проект «Безпечна висота дрона».....	62
1.3.3. Проект «Кіберщит серверу».....	67
1.4. Системи рівнянь: точка перетину ідей.....	73
1.4.1. Розробка прототипу серії «Alpha-9».....	73
1.4.2. Проектування системи автополиву «Smart Garden».....	78
1.4.3. Річкова логістика: подорож Дніпром.....	83
1.5. Числові послідовності: ритм чисел.....	88
1.5.1. Еко-ферма: крокуємо до сталого розвитку.....	88
1.5.2. Спортивна підготовка до благодійного марафону.....	94
1.5.3. Мікросвіт у вашій кишені: математика та біологія смартфонів....	99
1.5.4. Інформаційна епідемія: чи вистачить у вас антитіл?.....	104

1.5.5.	Інвестиції в «зелену» енергетику	109
1.6.	Елементи стохастики: логіка випадковості.....	115
1.6.1.	Цифрова фортеця: аналіз багаторівневого захисту.....	115
1.6.2.	Благодійна лотерея на підтримку ЗСУ.....	121
1.6.3.	Логістика майбутнього: аналіз надійності дронів-доставників...	127
1.7.	Повторення: простір рішень.....	134
1.7.1	Освітній стартап «SmartBooks».....	134
1.7.2.	Планування навчальної екскурсії.....	140
1.7.3.	Шкільна кав'ярня: планування продажів.....	148
	РОЗДІЛ 2. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ВСЕСВІТ: ВІД ПЛОЩИНИ ДО ПРОСТОРУ..	154
2.1.	Геометричний перезапуск: апгрейд знань 8 класу.....	155
2.1.1.	Проектування екологічного шкільного дворику.....	155
2.1.2.	Проектування майданчика для відпочинку.....	161
2.1.3.	Таємниця шкільного фонтану.....	168
2.1.4.	Ремонт басейну у спортивному комплексі.....	178
2.1.5.	Клумба з тюльпанами на подвір'ї школи.....	183
2.1.6.	Будівництво пандуса біля школи.....	188
2.2.	Мова напрямків: світ векторів.....	192
2.2.1.	Маршрут безпілотної літачки.....	192
2.2.2.	Оптимізація доставки.....	198
2.2.3.	Планування евакуації в школі.....	205
2.3.	Трикутник під мікроскопом: шукаємо невідоме.....	212
2.3.1.	Реконструкція купольної оранжереї.....	212
2.3.2.	Реконструкція паркової зони: острівна альтанка.....	217
2.3.3.	Дизайнерська склянка Anti-Roll.....	222

2.4. Фігури без меж: многокутники і коло.....	227
2.4.1. Таємниця циркової арени.....	227
2.4.2. Проєкт «Оновлення міського парку».....	232
2.4.3. Зрошувальна система.....	237
2.5. Магія перетворень: рухи фігур на площині.....	242
2.5.1. Розробка простої 2D – гри.....	242
2.5.2. Оптимальна зупинка.....	248
2.5.3. Аварія на підприємстві.....	254
2.6. Крок у простір: знайомство зі стереометрією.....	259
2.6.1. Проєкт «Космічний модуль для дослідницької станції».....	259
2.6.2. Проєкт «Скляний арт-об’єкт у центрі міста».....	265
2.6.3. Сцена-трансформер для концерту.....	271
2.7. Фінальний акорд: повторення геометрії 9 класу.....	279
2.7.1. Дизайн сучасного парку.....	279
2.7.2. Дрони над футбольним полем	284
2.7.3. Панорамне скління ТРЦ.....	289
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	294

ВСТУП. МАТЕМАТИКА ДЛЯ НУШ: СТВОРЮЄМО ЗАВДАННЯ, ЩО РОЗВИВАЮТЬ КРИТИЧНЕ МИСЛЕННЯ

Авторка: Тищенко Ірина Анатоліївна, методист математики лабораторії природничо-математичних дисциплін КНЗ “Черкаський обласний інститут післядипломної освіти педагогічних працівників Черкаської обласної ради» (керівник творчої групи)

Сьогодні вектор розвитку української освіти зміщений у бік особистісно орієнтованого навчання. Впровадження компетентнісного підходу на державному рівні ставить за мету комплексне формування знань, практичних навичок та ціннісних орієнтацій учнів. Особлива роль у цьому процесі належить математиці, яка є фундаментом інтелектуального зростання. Ключовим завданням середньої школи є виховання математичної компетентності як здатності застосовувати математичний апарат у побуті та майбутній професії. Водночас потенціал компетентнісних задач як інструменту розвитку цієї якості наразі залишається недостатньо дослідженим, що зумовлює актуальність даної проблеми.

Уявіть, що ваші учні не просто розв'язують рівняння на дошці, а планують бюджет шкільного фестивалю, аналізують траєкторію польоту дрона чи оптимізують дизайн мосту. Це не фантазія — це реальність компетентнісно орієнтованих завдань з математики! У сучасній освіті, орієнтованій на Нову українську школу, такі завдання перетворюють абстрактні формули на практичні навички, які учні застосовуватимуть у житті. Вони мотивують, бо показують: математика — це не нудні вправи, а ключ до кар'єри, інновацій та самостійності. Давайте розберемося, як створювати й використовувати ці завдання, щоб ваші учні «сяяли» на уроках і за їх межами.

Варто зазначити, що навчальна діяльність здобувачів освіти має бути спрямована на набуття ними компетентностей, необхідних для життя сучасного суспільства. Під компетентністю будемо розуміти інтегровану характеристику якості особистості як суб'єкта діяльності в певній галузі (сфері виробництва). Зокрема, математична компетентність — це якість особистості, яка поєднує в собі математичну грамотність та досвід самостійної математичної діяльності. Навчальний процес, побудований на основі компетентнісного підходу, передбачає, що перед учнями ставиться проблема, у процесі вивчення якої вони здійснюють цільовий пошук потрібних відомостей та формують орієнтовну основу дій щодо розв'язання таких завдань. Задачі такого типу сприяють свідомому застосуванню знань, способів діяльності, плануванню шляхів розв'язання, контролю та корекції власних дій. Теоретичний аналіз даної проблеми привів до висновку, що компетентнісні задачі є засобом формування математичної компетентності учнів основної школи.

На нашу думку, компетентісно орієнтоване завдання – це навчальна задача або спеціально створена дидактична конструкція, умова якої змодельована у вигляді проблемної ситуації та використовується з метою формування або перевірки ключових компетентностей.

Розв'язання таких завдань передбачає самоконтроль та самооцінку навчально-математичної діяльності. Компетентісні задачі сприяють інтелектуальній активності і самостійності як у процесі розв'язування, так і оцінювання (самооцінювання, взаємооцінювання) інтелектуального завдання, вони слугують здатності до цілепокладання, оцінювання, ефективної дії та рефлексії. Варто зазначити, що особливістю компетентісних задач є рефлексія виконаної діяльності.

Компетентісно орієнтовані завдання є структурними елементами нової моделі процесу навчання, в основі якого – особистісні цінності школярів, їхні інтереси, здатність до самостійного прийняття рішень.

Працюючи над завданням, учень сам визначає проблему, контролює процес її вирішення, а вчитель виконує функції організатора, консультанта, що супроводжує самостійну роботу учнівства.

Особливість таких завдань полягає в тому, що вони спрямовані не на відтворення інформації, а на організацію самостійної пошукової і творчої діяльності школярів з метою розв'язання певних життєвих проблем.

Компетентісно орієнтовані завдання передбачають застосування їх у практичній діяльності, тобто залучити школярів до активних дій.

Отже, **характерними ознаками таких завдань є:**

- контекстність: наявність реальної життєвої ситуації (побут, професія, суспільне життя);
- дефіцит або надмірність даних: учень має сам відібрати потрібну інформацію;
- міжпредметність: залучення знань з фізики, економіки, географії тощо;
- побудовані на актуальну для учнів тему;
- викликають інтерес у школярів;
- мають специфічну структуру;
- передбачають практичне застосування засвоєних знань, умінь і навичок;
- невизначеність методу: алгоритм розв'язання не є очевидним із формулювання;
- вимагають нестандартного підходу до виконання.

На відміну від стандартної математичної вправи, компетентісно орієнтоване завдання має чітку архітектуру:

1. Стимул: вступ, що занурює учня в певну ситуацію і мотивує на виконання завдання (навіщо це робити?).
2. Опис ситуації: детальний опис контексту.

3. Інформація: набір відомостей, які потрібні або можуть стати у пригоді. Завдання можуть містити і надлишкові дані, які не потрібні для розв'язування.

4. Тарифна сітка / джерела: таблиці, графіки, чеки, карти, з яких треба видобути дані.

5. Формулювання завдання: конкретні запитання до ситуації, пояснення того, що необхідно зробити.

6. Бланк для виконання завдання (у випадках, коли передбачена структурована відповідь – заповнення таблиці, схеми тощо).

7. Інструмент перевірки: критерії оцінювання виконаного завдання.

Потрібно чітко розмежовувати компетентнісні задачі з математики та навчальні прикладні задачі з математики (сюжетні задачі). Дослідники виокремлюють такі відмінності компетентнісних задач від математичних:

1) значущість одержаного результату, що забезпечує пізнавальну мотивацію учня;

2) умова задачі формулюється як сюжет, ситуація або проблема, для вирішення якої необхідно використовувати знання, на які немає явної вказівки в тексті задачі;

3) інформація та дані в задачі можуть бути представлені в різній формі, що потребує розпізнавання об'єктів;

4) вказівка щодо сфери застосування результату, що отримали в процесі розв'язування задачі;

5) за структурою компетентнісні задачі нестандартні (можуть бути невизначені деякі з компонентів);

6) наявність надлишкових, недостатніх або суперечливих даних в умові задачі, що призводить до об'ємного формулювання умови;

7) наявність декількох способів розв'язання (різний ступінь раціональності), причому способи можуть бути невідомі учням і їх необхідно буде сконструювати.

Порівняємо навчальну задачу з математики (сюжетну задачу) та компетентнісну задачу.

На відміну від традиційної математичної задачі, де результат часто обмежується демонстрацією формальних обчислювальних навичок, компетентнісно орієнтоване завдання має виражений пізнавальний потенціал. Розв'язання таких задач стимулює внутрішню мотивацію учнів, оскільки вимагає синтезу міжпредметних знань, навичок пошуку інформації у зовнішніх джерелах та критичного аналізу альтернативних стратегій. Це не лише активізує мисленнєву діяльність, а й формує культуру самоконтролю, перетворюючи навчання на усвідомлений дослідницький процес.

Математична (сюжетна) задача	Компетентнісно орієнтована задача
Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а його медіана розбиває даний трикутник так, що периметр одного з них на 6 см менший від периметра другого. Знайдіть бічну сторону даного трикутника.	Учні 8 класу готують дизайн-проект настінного годинника у формі рівнобедреного трикутника. Основа трикутника дорівнює 20 см. Для надійного кріплення механізму вони планують встановити опору всередині фігури — це буде медіана, проведена до однієї з бічних сторін. Під час моделювання на комп'ютері програма показала, що медіана розбиває трикутник на два менших трикутники так, що периметр одного з них на 6 см менший, ніж периметр другого. Щоб виготовити точний макет, учням необхідно визначити розміри всіх деталей.  Завдання 1. Виконайте рисунок задачі та позначте всі відомі елементи. 2. Позначте бічну сторону через a та запишіть довжини відрізків, на які медіана ділить сторону. 3. Складіть вирази для периметрів двох трикутників, на які медіана ділить початковий трикутник. 4. Складіть рівняння, використовуючи умову про різницю периметрів. 5. Розв'яжіть отримане рівняння та знайдіть бічну сторону трикутника. 6. Поясніть, що означає отриманий результат у контексті задачі (для виготовлення моделі годинника). 7. Як зміниться розв'язання, якщо медіану провести до іншої сторони?

Дослідники виділяють **три типи пізнавальних компетентнісних задач: предметні, міжпредметні, практичні.**

Щоб розв'язати **предметну компетентнісну задачу**, потрібно проаналізувати умову задачі, визначити зайві дані та дані, яких не вистачає, якщо потрібно виконати рисунок, з'ясувати, які дані з інших розділів математики потрібні для розв'язання, вибрати найбільш раціональний спосіб розв'язання, розв'язати задачу, зробити висновки.

Наприклад, розглянемо компетентнісно-орієнтоване завдання для учнів 8 класу: **«Майстер фасадних робіт».**

Опис ситуації.

Ви працюєте в сервісній службі. Вам необхідно встановити камеру спостереження на висоті 3,6 м від землі на стіні офісного центру. Для роботи

ви використовуєте професійну алюмінієву драбину довжиною 4 метри та масою 12 кг.

Важливо: за правилами безпеки, кут між драбиною та землею має бути в межах від 60° до 75° . Якщо кут менший — драбина може поїхати, якщо більший — перекинутися назад.

Додатково власник офісу попросив вас оновити фарбою бордюр на землі саме на тій ділянці, де стоятиме драбина (від стіни до ніжок драбини). Матеріали: фарба в банках по 250 грн. Однієї банки вистачає на 5 погонних метрів бордюру.

Умови: сонячно, вітер помірний.

Завдання до виконання

Етап I. Аналіз та моделювання

1. Складіть математичну модель задачі. Виконайте схематичний рисунок (трикутник), позначивши стіну, драбину та відстань на землі.

2. Проаналізуйте вхідні дані: випишіть, які з них є зайвими для математичних розрахунків, а яких значень (наприклад, тригонометричних) вам не вистачає.

Етап II. Математичне обґрунтування

3. Обчисліть кут нахилу драбини, якщо камеру закріпити на заданій висоті (3,6 м).

4. Зробіть висновок: чи відповідає цей кут нормам техніки безпеки?

5. Знайдіть відстань від стіни до основи драбини (довжину ділянки бордюру). Оберіть для цього найбільш раціональний спосіб (теорема Піфагора чи тригонометрія).

Етап III. Практичне рішення та рефлексія

6. Розрахуйте витрати на фарбу. Скільки банок потрібно купити та яка їхня повна вартість?

7. Рефлексія: Як зміниться ситуація із безпекою, якщо власник попросить підняти камеру на висоту 3,9 м? Чи вистачить у цьому випадку довжини цієї драбини?

Для розв'язання **міжпредметних компетентнісних задач** необхідно використовувати знання з інших навчальних предметів (фізики, хімії, біології, географії тощо), потрібно досліджувати умову або пошук даних, яких бракує, причому розв'язання і відповідь можуть залежати від результатів даних, отриманих у процесі дослідження.

Наприклад, розглянемо **міжпредметну задачу для учнів 9 класу:**

«Проект: Енергонезалежний еко-будинок».

1. Ситуація

Ваша родина вирішила модернізувати дачний будинок і встановити сонячну електростанцію (СЕС) на даху. Мета — забезпечити повну автономність будинку в червні, коли сонячної енергії найбільше. Вам, як головному інженеру проекту, потрібно розрахувати, чи вистачить площі даху для розміщення необхідної кількості панелей та чи буде це рішення ефективним.

2. Вхідні дані

- Ваш об'єкт: дах будинку має форму прямокутної трапеції з основами 10 м і 6 м та висотою (меншою бічною стороною) 5 м.
- Енергоспоживання: сім'я в середньому витрачає 12 кВт·год електроенергії на добу.
- Характеристики сонячної панелі:
 - розміри однієї панелі: 1,7 × 1,0 м;
 - номінальна потужність: 400 Вт (за ідеальних умов);
 - коефіцієнт втрат обладнання (інвертор, дроти): 15% (тобто ККД системи $\eta = 0,85$).
- Температурний режим: при нагріванні поверхні панелі понад 25°C її ефективність знижується на 0,4% за кожен наступний градус.

3. Завдання (робочий зошит дослідника)

Блок 1. Географічне дослідження (пошук інформації)

1. Знайдіть у мережі Інтернет або в атласі показник середньодобової сонячної інсоляції (I) для вашого регіону (або найближчого обласного центру) у червні. Одиниця виміру: кВт·год/м² за добу.
2. З'ясуйте середню максимальну температуру повітря у вашому регіоні в червні. Врахуйте, що на сонці панель нагрівається на 20°C більше за температуру повітря. Обчисліть, на скільки відсотків впаде потужність через перегрів.

Блок 2. Математичне моделювання

3. Розрахуйте реальну енергію, яку дасть одна панель за добу, за формулою:

$$E = I \cdot S \cdot \eta_{\text{sys}} \cdot k_{\text{temp}}$$

(де S — площа панелі, $\eta_{\text{sys}} = 0,85$, k_{temp} — коефіцієнт потужності з урахуванням втрат від перегріву).

4. Визначте кількість панелей, необхідних для забезпечення 12 кВт·год на добу. Округліть результат до цілого числа в більшу сторону.

Блок 3. Інженерне рішення

5. Обчисліть площу даху (трапеції).
6. Зробіть висновок: Чи зможете ви розмістити потрібну кількість панелей на даху? Схематично зобразіть варіант їх розташування (панелі не можна різати!).

Блок 4. Економічна оцінка та рефлексія

7. Оцініть окупність: Скільки коштів зекономить родина за червень, якщо тариф на електроенергію становить 4,32 грн/кВт·год?
8. Поміркуйте: Чи буде ця система так само ефективною в грудні? Які фактори, крім хмарності, на це вплинуть?

Для розв'язання практичних компетентнісних задач потрібно застосовувати знання, пов'язані з життєвими ситуаціями, з певним видом діяльності, тобто додаткові нематематичні знання; дані в задачі не повинні бути відірвані від реальності (повинні відповідати дійсності); отриманий результат має бути значущим для учнів.

Наприклад, розглянемо кейс-завдання для учнів 9 класу «Твій перший заробіток: рахуємо чистий прибуток».

1. Контекст ситуації

Ти вирішив (вирішила) не гаяти часу влітку і влаштуватися кур'єром у службу доставки. Менеджер запропонував тобі на вибір два варіанти оплати праці. Твоє завдання — провести «фінансовий аудит» обох пропозицій і обрати ту, яка принесе реальний прибуток, а не просто гарні цифри в оголошенні.

2. Умови працевлаштування

Компанія працює офіційно, тому з будь-якої нарахованої суми (твого доходу) обов'язково вираховуються державні податки:

1. ПДФО (Податок на доходи фізичних осіб) — 18%.
2. Військовий збір — 5%.

Пам'ятай: спочатку нараховується зарплата («брутто»), потім віднімаються податки, і лише після цього ти отримуєш гроші «на руки» («нетто»).

Варіанти оплати (за 1 робочу зміну):

- Варіант «Стабільний»: фіксована ставка 800 грн за зміну.
- Варіант «Активний»: бонус 300 грн за вихід на зміну + 50 грн за кожне доставлене замовлення.

3. Твоя робоча інструкція (завдання)

Крок 1. Правова довідка (дослідження)

Перш ніж підписати договір, скористайся інтернетом (кодексом законів про працю) і дай відповідь:

- Яка максимальна тривалість робочого дня дозволена в Україні для підлітків твого віку (15–16 років)? Чи має право менеджер вимагати від тебе працювати 8 годин на день?

Крок 2. Математичний аналіз

1. Склади формулу: Нехай x — кількість замовлень за зміну. Запиши функцію $f(x)$, яка дозволяє обчислити твою нараховану зарплату для варіанту «Активний».

2. Знайди «точку вигоди»: обчисли, скільки мінімально замовлень тобі потрібно зробити, щоб варіант «Активний» став вигіднішим за «Стабільний» (до вирахування податків).

Крок 3. Реальний розрахунок (твій гаманець)

Уяви, що ти працюєш за варіантом «Активний» і за день встигаєш виконати 12 замовлень.

1. Яку загальну суму тобі нарахує компанія?
2. Скільки грошей ти отримаєш «на руки» після сплати ПДФО (18%) та військового збору (5%)?
3. Фінальний розрахунок: твої щоденні витрати складають: 50 грн (проїзд) та 120 грн (обід). Скільки чистими залишиться у тебе в кишені після завершення дня?

Крок 4. Рефлексія

● Чи задовольняє тебе такий результат за один день роботи? Скільки змін тобі потрібно відпрацювати, щоб назбирати на омріяну річ (наприклад, кросівки за 3000 грн або смартфон), враховуючи лише «чистий» залишок?

Підказка: податки вираховуються відразу від усієї суми (разом 23%). Щоб швидко знайти суму «на руки», помнож нараховану зарплату на 0,77.

Під час розробки компетентнісно орієнтованих завдань необхідно звернути увагу на такі важливі аспекти:

➤ Будь-яка компетентнісна задача будується шляхом розгортання фабули (сюжету), а фабула — це життєва ситуація, учасниками якої можуть бути учні / учениці.

Наприклад, розглянемо алгоритм «Розгортання фабули».

Крок 1. Життєва ситуація (фабула)

Ситуація: група підлітків захоплюється пілотуванням FPV-дронів. Вони хочуть зняти відео крутого віражу навколо центральної вежі міста, але мають обмежений час польоту та складні умови вітру.

Крок 2. Учасники

Учні 9-го класу (Максим та Олена), які виконують ролі пілота та штурмана-програміста.

Крок 3. Наповнення деталями (розгортання сюжету)

Ми додаємо обмеження, які змушують використати геометрію 9-го класу:

- вежа має форму правильної шестикутної призми (тема: правильні многокутники);
- дрон має летіти за чіткою траєкторією, щоб камера завжди була спрямована на центр (тема: довжина кола або вектори);
- з'являється чинник вітру (тема: додавання векторів).

Приклад готової задачі: «Місія: аерозйомка» (9 клас)

Умова (фабула):

Максим та Олена готують відео для шкільного блогу про архітектуру міста. Їм потрібно, щоб дрон облетів навколо ратуші, основа якої є правильним шестикутником зі стороною 10 метрів.

Технічні виклики:

1. Траєкторія: для стабільного кадру дрон має рухатися по колу, що описане навколо цієї шестикутної основи, на висоті 15 метрів.

2. Вітер: під час польоту здійнявся боковий вітер. Власний вектор швидкості дрона спрямований на північ і дорівнює $\vec{v}(d) = 8$ м/с, а вектор швидкості вітру спрямований на схід і дорівнює $\vec{v}(w) = 6$ м/с.

Завдання для учнів:

1. **Геометрія форми:** обчисліть радіус кола, по якому має рухатися дрон, та загальну довжину одного повного кола обльоту.

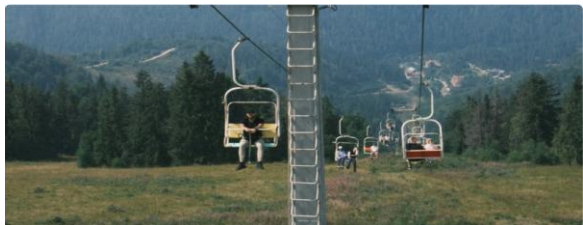
2. **Векторна логіка:** знайдіть модуль результуючої швидкості дрона

$\vec{v}(\text{res}) = \vec{v}(d) + \vec{v}(w)$. Як зміниться швидкість відносно землі через

вітер?

3. **Прийняття рішення:** якщо акумулятора дрона вистачає на 2 хвилини польоту при такій швидкості, чи встигне він зробити 5 повних кіл обльоту навколо вежі?

➤ Сюжетна основа (фабула) компетентнісної задачі подається в її преамбулі, яка містить виключно умову задачі: вихідні чисельні дані (їх може бути нестача або надлишок); «шум» (додаткові відомості пізнавального характеру). Наприклад, канатна дорога — це вид



пасажирського чи вантажного транспорту, в якому для переміщення рухомого складу служить сталевий канат. Довжина канатної дороги може становити від кількох десятків метрів до кількох десятків кілометрів. Довжина

однієї з канатних доріг у Карпатах (рисунок) дорівнює 1050 м. Відстань між кріслами становить 15 м.

➤ Розгортання фабули компетентнісної задачі здійснюється шляхом постановки запитань-завдань, у кожному з яких формулюється окрема вимога. Як правило, у таких задачах пропонується більше як одне запитання-завдання.



Наприклад, умова завдання: «На намет, що має форму куба, вирішили пошити покриття. Висота намету дорівнює b м».

Завдання:

1. Скільки квадратних метрів тканини потрібно для пошиття намету без урахування метрів

на шви?

А. $4b^2\text{м}^2$. Б. $3b^2\text{м}^2$. В. $6b^2\text{м}^2$. Г. $b^3\text{м}^2$

2. Які розміри намету, якщо його об'єм дорівнює 8м^3

Як бачимо, кожне запитання-завдання разом із преамбулою утворює окрему задачу, що є підзадачею цієї компетентнісної задачі. Отже, наведена задача містить дві підзадачі.

Зазначимо, що на основі преамбули наведеної компетентнісної задачі можна сформулювати й інші запитання, утворюючи нові підзадачі цієї компетентнісної задачі та розширюючи її зміст.

Обсяг компетентнісної задачі теоретично не має обмежень. Однак на практиці такі обмеження можуть виникнути, наприклад, з огляду на дидактичну доцільність, якщо завдання пропонується учнівству на контрольній роботі.

Натомість у процесі навчання розширення компетентнісної задачі не лише можливе, а й корисне, особливо, коли учні та учениці самостійно формулюють нові запитання на основі заданої фабули. Це сприяє розвитку критичного мислення й глибшому розумінню матеріалу.

➤ Запитання-завдання в компетентнісно орієнтованих задачах

зазвичай подаються в таких формах:

- у формі завдання з вибором відповіді;
- у відкритій формі, коли учень / учениця має навести власне розв'язання задачі;

- у мішаній формі, коли учень / учениця має вибрати відповідь із запропонованих і пояснити чи обґрунтувати свій вибір.

➤ У компетентісно орієнтованих задачах серед запропонованих відповідей не завжди є лише одна правильна, подібно до реального життя, де з однієї ситуації часто існує кілька можливих виходів. У таких завданнях обов'язково зазначається, скільки відповідей може бути правильними.

Навчально-методичний посібник «Методичний кейс: компетентісно орієнтовані завдання з математики для 9 класу НУШ» підготовлено вчителями математики обласної творчої групи протягом 2025-2026 навчального року з метою надати вчителям математики 9-х класів дієвого інструментарію (методичного кейсу) для формування ключових і предметних математичних компетентностей в учнів Нової української школи шляхом впровадження до освітнього процесу комплексних, практико-орієнтованих та міждисциплінарних завдань, що моделюють реальні життєві ситуації, сприяючи глибокому розумінню математичних понять, розвитку критичного мислення та застосуванню набутих знань для розв'язання типових проблем.

До складу обласної творчої групи увійшли такі педагоги:

Тищенко Ірина Анатоліївна, методист математики лабораторії природничо математичних дисциплін КНЗ «Черкаський обласний інститут післядипломної освіти педагогічних працівників Черкаської обласної ради» (керівник творчої групи); **Лискова Світлана Миколаївна та Озірська Світлана Іванівна**, вчителі математики Золотоніської спеціалізованої школи №2 інформаційних технологій Золотоніської ради Черкаської області; **Черненко Ольга Павлівна**, вчитель математики навчально-виховного комплексу «Загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів №3-колегіум» Смілянської міської ради Черкаської області; **Волкова Катерина Михайлівна та Гонза Валерія Євгенівна**, вчителі математики Черкаської гімназії №9 ім. О. М. Луценка Черкаської міської ради Черкаської області; **Лесик Ольга Костянтинівна та Науменко Інна Миколаївна**, вчителі математики Золотоніської гімназії ім. С.Д. Скляренка Золотоніської міської ради Черкаської області; **Бедусенко Ольга Сергіївна**, вчитель математики Леськівського ліцею з початковою школою та гімназією Леськівської сільської ради Черкаського району Черкаської області; **Кузьменко Лариса Олександрівна**, вчитель математики Черкаського гуманітарно-правового ліцею Черкаської міської ради Черкаської області.

Членами творчої групи розроблені **48 компетентісно орієнтованих завдань (кейсів) з математики для учнів 9-го класу**, що охоплюють усі змістові лінії навчальної програми НУШ (алгебра та геометрія); забезпечений міждисциплінарний зв'язок завдань шляхом інтеграції

контекстуальних даних з інших освітніх галузей (фінансова грамотність, природничі науки, технології тощо).

До кожного завдання створені детальні методичні рекомендації для вчителя, що включають: очікувані результати навчання (згідно з НУШ), перелік компетентностей, що формуються, повне розв'язання, критерії оцінювання та можливі варіанти диференціації; розроблені алгоритми (покрокові інструкції) для вчителів щодо впровадження кейс-методу на уроках математики, включаючи етапи роботи з кейсом та формати організації групової / парної роботи.

Завдання спрямовані на перевірку сформованості умінь застосовувати здобуті знання у незвичному контексті. Виконання завдань не завжди потребує знань конкретних формул або опису процесу пошуку його виконання. У завданнях може бути вміщена зайва інформація, можливі кілька правильних варіантів відповідей, або єдиним способом розв'язання може бути метод спроб і помилок. Цей збірник, що містить як завдання, так і відповіді на них, стане у нагоді вчителям математики у впровадженні компетентнісного підходу у навчанні, посиленні прикладної спрямованості курсу математики, а також у підготовці учнів до НМТ/ЗНО та PISA наступних років.

Використані джерела:

1. Зіненко І.М. Визначення структури математичної компетентності учнів старшого шкільного віку. Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. 2009. Вип. 2. С. 165–174.
2. ЗМІСТ КОМПЕТЕНТІСНИХ ЗАДАЧ ІЗ МАТЕМАТИКИ / О.М. Луцик. URL:https://pedagogy-journal.kpu.zp.ua/archive/2020/70/part_2/20.pdf (дата звернення 18.03.2026).
3. Компетентнісні завдання як засіб формування інформатичної компетентності в умовах неперервної освіти / Н.В. Морзе та інші. Інформаційні технології в освіті. 2010. № 6. С. 23–31.
4. 100 компетентнісних завдань для 7–8 класів: нова платформа для вчителів. Платформа Освіторія. URL:<https://surl.li/ahgxrw> (дата звернення 18.03.2026).
5. Тарасенкова Н.А. Задачі як засоби компетентнісного навчання математики. Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики: до 70-річчя кафедри математики і теорії та методики навчання математики НПУ імені М.П. Драгоманова : тези доп. Міжнар. наук.-практ. конф., 11–13 травня. 2017 р. Київ : НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2017. С. 77–78.

РОЗДІЛ 1. АЛГЕБРАЇЧНИЙ ВСЕСВІТ: ВІД ПРОСТОГО ДО СКЛАДНОГО

Ми не можемо розв'язувати наші проблеми, використовуючи той самий спосіб мислення, яким ми їх створили.

Альберт Ейнштейн

Світ, у якому живуть сучасні підлітки, — це не лише формули в зошиті. Це світ рішень, вибору і відповідальності. За даними досліджень



ОЕСД (Організація економічного співробітництва та розвитку (англ. *Organisation for Economic Co-operation and Development*, OECD)), саме здатність застосовувати математичні знання в реальних ситуаціях є ключовою навичкою ХХІ століття.

Кожен день люди, навіть не помічаючи цього, розв'язують «алгебраїчні задачі»: планують бюджет, аналізують прибутки, прогнозують витрати, приймають рішення в умовах невизначеності. Бізнеси будують моделі доходів, інженери оптимізують процеси, а звичайні підлітки як герої наших задач — шукають відповіді на запитання: «А що буде, якщо...?»

Саме тому задачі цього розділу — це не просто вправи. Це сценарії життя, у яких алгебра стає інструментом мислення. Тут квадратна функція перетворюється на модель бізнесу, нерівності — на межі можливостей, а послідовності — на історію зростання або втрат.

Кожна задача — це маленьке дослідження:

- спочатку виникає проблема;
- далі - її математична модель;
- потім - розв'язання;
- і найголовніше - інтерпретація результату, яка відповідає на запитання: «Що це означає в реальному житті?»

У матеріалах розділу реалізовано підхід, рекомендований концепцією НУШ: навчання через діяльність, дослідження та практичний контекст. Учень тут не просто виконує обчислення — він виступає в ролі дослідника, аналітика, підприємця.

Адже головна ідея проста: математика - це не про числа. Це про рішення. Тож запрошуємо до роботи — де кожна задача починається з історії, а завершується — розумінням.

1.1. Нерівності: межі можливого

1.1.1. Екологічна логістика: обираємо транспорт для бізнесу

Авторка: *Черненко Ольга Павлівна, вчитель математики навчально-виховного комплексу «Загальноосвітня школа I–III ступенів №3-колегіум» Смілянської міської ради Черкаської області*

Опис ситуації. Клінінгова компанія «Чистий Світ» планує придбати електромобіль для доставки персоналу та обладнання. Директор порівнює



дві моделі експлуатації авто, щоб мінімізувати витрати та дотриматися екологічних стандартів (витрати на 100 км пробігу).

Варіант А (Оренда): компанія сплачує фіксований внесок 12 000 грн на місяць плюс 80 грн за кожні 100 км пробігу (сервісне обслуговування).

Варіант Б (Лізинг з повним сервісом): компанія сплачує 18 000 грн на місяць, куди вже включено всі витрати на сервіс, незалежно від пробігу.

Завдання:

1. Складіть вираз для обчислення щомісячних витрат для Варіанту А, де x — кількість сотень кілометрів, пройдених за місяць.
2. Складіть нерівність, щоб визначити, за якого місячного пробігу (у сотнях км) Варіант Б стає фінансово вигіднішим за Варіант А.
3. Чи варто компанії переходити на Варіант Б, якщо середній місячний пробіг авто становить 8 500 км? Обґрунтуйте відповідь розрахунком.
4. Згідно з новими правилами, компанія отримає еко-субсидію, якщо сумарні витрати на транспорт не перевищуватимуть 25 000 грн на місяць. Визначте максимальний пробіг (у км) для Варіанту А, при якому компанія зможе претендувати на субсидію.

Методичні рекомендації для вчителя

Очікувані результати навчання:

Предметна компетентність: учень/учениця будує математичну модель реальної ситуації у вигляді лінійної нерівності; розв'язує нерівності з однією змінною; інтерпретує отримані числові межі в контексті практичної задачі.

Моделює: перехід від текстової умови до математичного запису $12000 + 80x < 18000$.

Ключові компетентності:

Екологічна грамотність: вибір на користь електромобілів.

Фінансова грамотність: аналіз умов оренди та лізингу, оптимізація витрат підприємства.

Розв'язання задачі «Екологічна логістика»

1. Складання виразу для Варіанту А

Нехай x — кількість сотень кілометрів за місяць.

Тоді щомісячні витрати складаються з фіксованої частини (12 000 грн) та змінної (80 грн за кожну одиницю x).

Вираз: $12000 + 80x$.

2. Складання та розв'язання нерівності

Щоб знайти, коли Варіант Б (лізинг — 18 000 грн) стає вигіднішим, потрібно розв'язати нерівність, де витрати Варіанту А перевищують витрати Варіанту Б:

$$12000 + 80x > 18000$$

Кроки розв'язання:

1. Переносимо числові значення в одну сторону: $80x > 18000 - 12000$

2. Отримуємо: $80x > 6000$

3. Ділимо на 80: $x > 6000/80$

4. $x > 75$

Оскільки x — це сотні кілометрів, то пробіг має бути більше ніж $75 \cdot 100 = 7500$ км.

Відповідь: Варіант Б вигідніший, якщо місячний пробіг перевищує 7500 км.

3. Аналіз для пробігу 8 500 км

Середній пробіг 8 500 км відповідає значенню $x = 85$. Оскільки $85 > 75$, це значення потрапляє в зону вигідності Варіанту Б.

Перевірка розрахунком:

Витрати А: $12000 + 80 \cdot 85 = 12000 + 6800 = 18800$ грн.

Витрати Б: 18000 грн.

$18800 > 18000$. Компанія зекономить 800 грн на місяць.

Відповідь: Так, компанії варто переходити на Варіант Б.

4. Визначення максимального пробігу для субсидії

Нам потрібно знайти такий пробіг x , при якому загальні витрати за Варіантом А не перевищують 25 000 грн: $12000 + 80x \leq 25000$

1. $80x \leq 25000 - 12000$

2. $80x \leq 13000$

3. $x \leq 13000/80$

4. $x \leq 162,5$

Переводимо сотні кілометрів у звичайні: $162,5 \cdot 100 = 16250$ км.

Відповідь: Максимальний пробіг для отримання субсидії становить 16 250 км.

Резюме для учня

Це завдання демонструє, як нерівності допомагають бізнесу приймати рішення. Ми побачили, що:

До 7500 км вигідніша оренда (гнучкість).

- Після 7500 км вигідніший лізинг (стабільність).

- Математична модель дозволяє чітко бачити межі фінансової безпеки (субсидія).

Диференціація за змістом (Що вивчаємо?)

1. Спрощення даних (для слабших учнів):

Замінити числа на більш прості: оренда 10 000 грн, лізинг 15 000 грн, вартість км — 100 грн. Це дозволить зосередитися на принципі складання нерівності, а не на великих обчисленнях.

2. Ускладнення даних (для сильніших учнів):

Додати третій варіант (наприклад, власне авто), де враховується амортизація за формулою квадратичної функції, що призведе до розв'язання квадратної нерівності.

3. Виключення даних:

Для сильних учнів не давати підказку про «сотні кілометрів», нехай вони самі визначають одиницю виміру змінної x .

Диференціація за процесом (Як працюємо?)

Цей варіант адаптує шлях, яким учень іде до розв'язання, забезпечуючи необхідну підтримку або, навпаки, надаючи простір для самостійного дослідження.

1. Різна ступінь підтримки («Сходинки допомоги»):

Для учнів, що потребують підтримки: Надається картка-алгоритм (scaffolding), яка розбиває складну задачу на прості кроки:

Крок 1: Виділіть незмінну частину витрат (абонплата) та ту, що залежить від кілометрів.

Крок 2: Складіть вираз для Варіанту А (пам'ятайте, що x — це сотні км).

Крок 3: Поставте знак нерівності ($>$) між виразом Варіанту А та вартістю Варіанту Б.

Крок 4: Розв'яжіть нерівність відносно x .

Для сильних учнів: запропонувати самостійно сформулювати алгоритм розв'язання для завдання №4, де потрібно врахувати обмеження бюджету (субсидію).

2. Групова робота та взаємонавчання:

- **Гетерогенні групи:** об'єднання учнів у малі групи (3–4 особи), де:

- *Спікер* (сильний учень) пояснює логіку побудови нерівності.

- *Аналітик* перевіряє правильність обчислень та переведення одиниць виміру (км у сотні км).

- *Дизайнер* оформлює висновок у вигляді рекомендації для компанії.

• **Гомогенні групи:** слабші групи працюють з учителем над базовим розв'язком, тоді як сильніші групи самостійно досліджують додаткові умови (наприклад, зміну вартості сервісу).

3. Використання інструментів (ІКТ):

• **Для візуалів:** Використання онлайн-калькуляторів графіків (наприклад, **Desmos** або **GeoGebra**) для побудови лінійних функцій $y = 12000 + 80x$ та $y = 18000$.

Це дозволяє побачити «точку беззбитковості» візуально.

• **Для практиків:** Створення моделі розрахунку в **Excel**, де зміна вхідних даних (вартість оренди чи ціна за км) автоматично змінює результат нерівності.

Диференціація за результатом (Що отримуємо?)

1. **Обов'язковий результат:** Розв'язані завдання 1–2 (побудова та розв'язок базової нерівності).

2. **Додатковий результат:**

• Побудова графіка в системі координат (вісь Y — витрати, вісь X — пробіг), де точка перетину ліній наочно демонструє «поріг вигідності».

• Написання короткої доповідної записки директору з рекомендацією щодо вибору моделі фінансування.

Формат подання результатів



Учні можуть обрати один із трьох форматів представлення розв'язку задачі про екологічну логістику:

1. Традиційний письмовий звіт (аналітичний формат)

Для кого: для учнів, які віддають перевагу чіткій структурі та класичному математичному запису.

Що включає:

• покроковий запис умови та розв'язання нерівностей;

• письмове обґрунтування вибору тарифу для пробігу 8 500 км;

• відповідь на кожне запитання задачі у форматі «Дано — Розв'язання — Відповідь».

2. Бізнес-рекомендація або постер (візуально-комунікативний формат)

Для кого: для учнів з розвиненим креативним мисленням та навичками переконування.

Що включає:

- створення короткої презентації або плаката «Економічне обґрунтування для компанії «Чистий Світ»;
- графічне представлення: Побудова системи координат, де лінія $y = 12000 + 80x$ перетинається з $y = 18000$;
- висновок: поради для директора у форматі «Якщо пробіг менше ніж 7500 км — обирайте А, якщо більше — Б».

3. Цифрова модель або калькулятор (технологічний формат)

Для кого: для учнів, які цікавляться ІТ та програмуванням.

Що включає:

- файл у MS Excel або Google Таблицях;
- налаштовані формули, де при зміні вхідних даних (наприклад, вартості лізингу) автоматично перераховується точка вигідності;
- демонстрація того, як змінюється результат при різних значеннях пробігу через автоматичне фарбування комірок (умовне форматування).

Критерії оцінювання (НУШ)

Тема: Лінійні вирази та нерівності в прикладній задачі

<i>Рівень</i>	<i>Бали</i>	<i>[МАО 1] Дослідження ситуації</i>	<i>[МАО 2] Моделювання та стратегія</i>	<i>[МАО 3] Критичне оцінювання</i>
Початковий	1–3	Учень/учениця фрагментарно розуміє умову. Не виокремлює змінну або плутає одиниці вимірювання (км і сотні км).	Запис моделі відсутній або містить суттєві помилки. Нерівність складено неправильно.	Відсутній аналіз результату. Висновок необґрунтований або відсутній.
Середній	4–6	Розуміє проблему частково. Визначає змінну, але потребує допомоги в інтерпретації.	Складає вираз $12000 + 80x$ з незначними неточностями. Розв'язує нерівність із помилками обчислювального характеру.	Робить висновок без повного пояснення. Не пов'язує результат із практичним контекстом.
Достатній	7–9	Коректно виокремлює проблему (порівняння витрат), правильно визначає змінну та одиниці вимірювання.	Правильно складає вираз і нерівність. Коректно розв'язує її та виконує обчислення для 8500 км і для субсидії.	Обґрунтовує вибір варіанта. Пояснює економічний зміст отриманого результату. Допускає незначні неточності в формулюваннях.
Високий	10–12	Самостійно аналізує ситуацію,	Точно й логічно будує математичну модель,	Критично оцінює результат, перевіряє

<i>Рівень</i>	<i>Бали</i>	<i>[МАО 1] Дослідження ситуації</i>	<i>[МАО 2] Моделювання та стратегія</i>	<i>[МАО 3] Критичне оцінювання</i>
		встановлює залежності між величинами, може запропонувати додаткові припущення (наприклад, зміну тарифу).	обґрунтовує кожен етап розв'язання, демонструє стратегічне мислення (точка беззбитковості).	доцільність відповіді, інтерпретує її в економічному та екологічному контексті, робить узагальнення.

1.1.2. Вибір інтернет-провайдера

Авторка: *Волкова Катерина Михайлівна, вчитель математики Черкаської гімназії №9 ім. О. М. Луценка Черкаської міської ради Черкаської області*

Опис ситуації.

Сім'я планує підключити домашній інтернет у новій квартирі. Вони розглядають два варіанти:



Провайдер «А» - абонплата 150 грн/місяць, але після використання базового ліміту потрібно платити 5 грн за кожен додатковий гігабайт,

Провайдер «В» - абонплата 200 грн/місяць, інтернет безлімітний.

Однак сім'я не знає

:

- який у них буде реальний обсяг використання інтернету;
- чи однаково вони користуються інтернетом щомісяця;
- чи враховано приховані витрати;
- який тариф вигідніший у довгостроковій перспективі.

Вам потрібно допомогти їм ухвалити рішення, якщо умова містить неповні та неточні дані: у сім'ї 3 людини; один працює дистанційно; одна дитина дивиться відео онлайн; інколи завантажуються ігри; точний ліміт провайдера «А» не вказано (його потрібно припустити або знайти).

Учням пропонується:

- зробити обґрунтовані припущення,
- знайти додаткові дані;
- пояснити вибір моделі.

Методичні рекомендації для вчителя

- Знайомство з умовою задачі почати з питання: «Як ви обираєте тариф мобільного зв'язку?»
- Дозволити учням робити припущення — це ключ НУШ.
- Заохочувати різні відповіді (немає єдиного «правильного» рішення).

Оцінювати не лише результат, а хід мислення.

Очікувані результати навчання (відповідно до НУШ)

Учень/учениця

- аналізує життєву ситуацію та виокремлює математичну проблему;
- будує математичну модель реальної ситуації;

- інтерпретує результати обчислень у реальному контексті;
- критично оцінює отримані висновки;
- аргументує власну позицію

I. Предметна компетентність (математична):

Учень/учениця знає визначення лінійної нерівності та розуміє, що таке розв'язок нерівності; розв'язує лінійні нерівності з однією змінною; зображує розв'язки нерівності на числовій прямій та записує їх у формі числових проміжків; використовує лінійні нерівності для розв'язання практичних задач, що потребують оцінки значень, порівняння або знаходження меж

II. Ключові компетентності

Підприємливість та фінансова грамотність

Працює з даними та припущеннями, обирає необхідну інформацію для розв'язання проблеми, відкидаючи непотрібні дані; оцінює переваги та ризики різних виборів провайдерів

Інформаційно – цифрова компетентність

Моделює залежності за допомогою формул та графіків, працює з таблицями даних; виконує обчислення за допомогою комп'ютерних програм та технологій

Уміння вчитися впродовж життя

Застосовує математичні знання до практичних ситуацій; знаходить алгоритми самоконтролю та здатності застосування знань в нових ситуаціях

Критичне мислення

Критично оцінює отримані висновки; аргументує власну позицію, вчиться виокремлювати факти від маніпуляцій, аналізуючи статистичні дані

Соціальна та громадянська компетентність

Учні співпрацюють в групах, вчать враховувати інтереси інших людей, конструктивно оцінювати роботу однокласників, усвідомлюють роль математики у прийнятті суспільно важливих рішень

III. Наскрізнi вміння

Під час розв'язання задачі на різних етапах уроку формуються вміння виділяти проблему, яку потрібно розв'язати, читання з розумінням, вміння аналізувати інформацію, відокремлення суттєвих даних від другорядних, робота з невизначеністю (етап аналізу умови), під час розв'язування задачі формується розвиток логічного мислення, аргументування; на етапі перевірки та інтерпретації результату формується вміння оцінювати результат, робити висновки; на етапі рефлексії – учень/учениця вчиться прийомам самооцінювання, аналізу власної діяльності

Розв'язання:

Крок 1: введення змінної

Нехай: x —кількість використаних ГБ за місяць. Нехай базовий ліміт провайдера А — L ГБ (учні можуть прийняти припущення, наприклад $L = 100$ ГБ)

Крок 2 : побудова математичних моделей

Провайдер А: якщо $x \leq L$, то оплата за інтернет 150 грн за місяць;
якщо

$x > L$, то плата за місяць $150 + 5(x - L)$ грн

Провайдер В: плата за місяць 200 грн

Крок 3: знаходимо точку вигідності

Коли тарифи однакові:

$$150 + 5(x - L) = 200$$

$$5(x - L) = 50$$

$$x - L = 10$$

$$x = L + 10$$

Якщо $L=100$, то $x=110$ ГБ

Висновок: до 110 ГБ вигідніший тариф А; понад 110 ГБ — тариф Б.

Крок 4 : довгостроковий аналіз

Річна вартість

для тарифу В : $200 \cdot 12 = 2400$ грн;

для тарифу А: залежить від використання → учні створюють таблицю або графік.

Крок 5: критичний аналіз

Учні повинні врахувати

- коливання використання;
- можливе зростання онлайн-активності;
- приховані платежі (підключення, оренда роутера).

Орієнтовні критерії оцінювання

<i>Рівень</i>	<i>МАО 1 аналіз ситуації</i>	<i>МАО 2 модельовання</i>	<i>МАО 3 критичне мислення</i>	<i>Бали</i>
початковий	розуміє умову частково	модель відсутня	висновки відсутні	1-3
середній	виділяє проблему з допомогою	складає просту формулу	робить часткові висновки	4-6
достатній	самостійно формулює задачу	будує правильну модель	пояснює результат	7-9

високий	аналізує невизначені дані	створює повну модель і графік	оцінює обмеження моделі, робить прогноз	10-12
---------	---------------------------	-------------------------------	---	-------

Диференціація (за змістом)

Спрощення (підтримка):

- задати готовий ліміт (наприклад 100 ГБ);
- дати заповнену таблицю значень;
- працювати без графіків.

Базовий рівень:

- скласти формули;
- знайти точку рівності тарифів;
- зробити висновок.

Поглиблений рівень:

- побудувати графіки функцій;
- проаналізувати річні витрати;
- врахувати змінне використання.

Високий рівень (дослідницький): запропонувати

- випадкове щомісячне використання;
- середнє значення та розмах;
- створення моделі в Excel / GeoGebra.

Диференціація (за процесом)

Група учнів	Організація роботи
<i>Підтримка</i>	робота з готовою таблицею значень
<i>Базовий рівень</i>	побудова формули та таблиці
<i>Достатній рівень</i>	побудова графіків функцій
<i>Високий рівень</i>	самостійне дослідження з припущеннями

Диференціація за результатом (що отримують учні)

Рівень результату	Очікуваний продукт
<i>Базовий</i>	таблиця вартості тарифів
<i>Середній</i>	правильне розв'язання задачі
<i>Достатній</i>	графік функцій витрат
<i>Високий</i>	дослідження різних сценаріїв використання

Результати роботи учні можуть представити у вигляді:

- письмового розв'язання;
- графічної моделі;
- міні-дослідження;
- рекомендації для сім'ї

Представлена задача формує навички математичного моделювання, фінансову грамотність, навички прийняття рішень, розвиває критичне мислення.

1.1.3. Планування раціону спортсмена

Авторка: *Волкова Катерина Михайлівна, вчитель математики Черкаської гімназії №9 ім. О. М. Луценка Черкаської міської ради Черкаської області*



Спортсмен Андрій готується до змагань з легкої атлетики. Його тренер рекомендував контролювати калорійність сніданку та щоденну норму вітамінної добавки. З рекомендацій спортивного лікаря відомо:

-сніданок має містити не більше 600 ккал;

-спортсмен зазвичай їсть вівсянку (≈ 320 ккал), але точна калорійність залежить від порції;

- один енергетичний батончик містить 140 ккал (за інформацією виробника);

- виробник допускає похибку ± 5 ккал (не потрібно враховувати під час аналізу).

Також спортсмен приймає вітамінну добавку:

- для ефекту подвійна доза має перевищувати 15 г;

- з міркувань безпеки: якщо до потрібної дози додати 5 г, результат має бути меншим за 35 г.

Андрій знайшов різні рекомендації в інтернеті, але вони частково суперечливі. Йому потрібно математично визначити допустимі межі.

Дані для дослідження

Таблиця 1. Калорійність продуктів сніданку

продукт	маса	калорійність
вівсянка	250 г	320 ккал
банан	120 г	105 ккал
йогурт	150 г	90 ккал
енергетичний батончик	1 шт.	140 ккал

Таблиця 2. Дані про добавку (з різних джерел)

джерело	рекомендована доза
виробник	6 – 10 г
спортивний блог	8 – 12 г
лікар	визначити індивідуально

Методичні рекомендації для вчителя

Завдання моделює реальну життєву ситуацію вибору в умовах обмежень і суперечливих даних. Під час розв'язання проблемної задачі учні можуть використати для пошуку та аналізу наступні ресурси: таблиці калорійності продуктів (МОЗ України);

- рекомендації спортивної медицини;
- етикетки харчових продуктів;
- калькулятори калорійності;
- порівняння кількох джерел інформації.

Проблемні питання уроку:

- чому потрібно враховувати похибку?
- чи можна довіряти одному джерелу інформації?
- чи завжди найбільше значення є безпечним?
- чи зміниться відповідь, якщо спортсмен з'їсть банан?

Очікувані результати навчання (відповідно до НУШ)

Учень/учениця

- аналізує життєву ситуацію та виокремлює математичну проблему;
- будує математичну модель реальної ситуації;
- інтерпретує результати обчислень у реальному контексті;
- критично оцінює отримані висновки;
- аргументує власну позицію

I. Предметна компетентність (математична)

Учень/учениця **розуміє** зміст лінійної нерівності, **інтерпретує** обмеження реальної ситуації математично; **виділяє** змінні та величини, **складає** математичні моделі; **розв'язує** нерівності та їх системи, **аналізує** похибку вимірювань; **використовує** лінійні нерівності для розв'язання практичних задач, що потребують оцінки значень, порівняння або знаходження меж.

II. Ключові компетентності

Природнича компетентність

Будує та досліджує математичні моделі природних об'єктів, **робить** висновки на основі реальних даних

Інформаційно- цифрова компетентність

Моделює залежності за допомогою формул та графіків, **працює з таблицями** даних; **виконує** обчислення за допомогою комп'ютерних програм та технологій

Уміння навчатися впродовж життя

Застосовує математичні знання до практичних ситуацій; **здійснює пошук** алгоритмів самоконтролю та здатності застосування знань в нових ситуаціях

Критичне мислення

Критично оцінює отримані висновки; аргументує власну позицію, **вчиться** виокремлювати факти від маніпуляцій, аналізуючи статистичні дані; критично ставиться до інформації з різних джерел

Соціальна та здоров'язбережувальна компетентність

Усвідомлює роль математики у здоровому способі життя

III. Наскрізні вміння

Під час розв'язання задачі на різних етапах уроку формуються вміння виділяти проблему, яку потрібно розв'язати, читання з розумінням, вміння аналізувати інформацію, відокремлення суттєвих даних від другорядних (етап аналізу умови), під час розв'язування задачі формується розвиток логічного мислення, аргументування; на етапі перевірки та інтерпретації результату формується вміння оцінювати результат, робити висновки; на етапі рефлексії – учень/учениця навчиться прийомам самооцінювання, аналізу власної діяльності

Розв'язання:

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ

1. Модель калорійності сніданку

Позначення:
 x — кількість енергетичних батончиків (шт.).

Дані:

- Вівсянка: 320 ккал
- 1 батончик: 140—145 ккал
- Норма: не більше 600 ккал

Математична модель:

- $320 + 145x \leq 600$

Розв'язання:

- $145x \leq 280$
- $x \leq 1,93$

Висновок: $x_{\text{max}} = 1$

2. Модель для вітамінної добавки

Позначення:
 x — маса добавки (г)

Умови:

- $2x > 15$
- $3x + 5 < 35$

Допустимий інтервал:

- $7,5 < x < 10$

Перевірка:

- $x = 9$
- $2 \cdot 9 = 18 > 15$ ✓
- $3 \cdot 9 + 5 = 32 < 35$ ✓

Висновок: 9 г — допустима доза

Підсумок: Максимум батончиків: **1** | Добавка: **$7,5 < x < 10$**

Частина 1. Калорійність сніданку

Нехай x – кількість батончиків

врахування даних:

- вівсянка ≈ 320 ккал;
- батончик – 140 ккал;
- допустима похибка: ± 5 ккал

Максимальна калорійність батончика 145 ккал (беремо найгірший випадок) складаємо нерівність:

$$320 + 145x \leq 600$$

розв'язання:

$$145x \leq 280$$

$$x \leq 1,93$$

оскільки батончиків ціле число, то з урахуванням похибки спортсмен може з'їсти не більше 1 батончика (без урахування похибки — 2, що створює ситуацію для обговорення).

Частина 2. Вітамінна добавка

Нехай x – доза вітамінної добавки (г)

Умова ефективності: $2x > 15$

$$x > 7,5$$

умова безпеки: $3x + 5 < 35$
 $3x < 30$
 $x < 10$

спільний розв'язок: $7,5 < x < 10$

інтерпретація : допустимі значення (7,5; 10)

Орієнтовні критерії оцінювання

<i>Рівень</i>	<i>МАО 1 дослідження ситуації</i>	<i>МАО 2 моделювання</i>	<i>МАО 3 критичне оцінювання</i>	<i>Бали</i>
початковий	визначає окремі дані	працює за зразком	не аналізує результат	1-3
середній	виділяє проблему з допомогою	складає нерівність	частково пояснює	4-6
достатній	самостійно формулює умову	будує правильну модель	перевіряє розв'язок	7-9
високий	аналізує похибки і припущення	створює повну модель самостійно	оцінює реалістичність і робить висновки	10-12

Варіанти диференціації (за змістом)

Базовий рівень:

- скласти нерівність за підказкою; розв'язати одну нерівність.

Середній рівень:

- врахувати похибку; пояснити відповідь.

Достатній рівень:

- побудувати числову пряму; інтерпретувати результат.

Високий рівень:

- дослідити зміну відповіді при іншій калорійності; створити власну модель сніданку

Варіанти диференціації (за процесом навчання)

Базовий рівень

- учні працюють за покроковим алгоритмом або підказками (приклад завдання: визначте змінну та складіть нерівність для кількості батончиків)

Середній рівень

- робота в парах або малих групах, обговорення даних задачі(приклад завдання: складіть модель задачі та поясніть, які дані є необхідними)

Достатній рівень

- самостійне моделювання ситуації (приклад завдання: розв'яжіть задачу з урахуванням похибки калорійності)

Високий рівень

- дослідницька робота (проаналізуйте, як зміниться відповідь, якщо калорійність вівсянки становить 280-350 ккал)

Диференціація (за результатом)

Варіанти організації процесу роботи

Робота з різними типами підказок

Картка 1 (алгоритм)

1. Введіть змінну.
2. Складіть нерівність.
3. Розв'яжіть її.

Картка 2 (часткова підказка)

Складіть нерівність:

$$320+145x \leq 600$$

Картка 3 (без підказок)

Самостійно створіть математичну модель.

Різні способи представлення інформації

Учні можуть:

- працювати з **таблицею калорійності**;
- побудувати **графік функції**;
- використовувати **числову пряму**;
- створювати **схему задачі**

Різний темп навчання

Група	Завдання
Швидкий темп	Додаткове дослідження похибки
Середній темп	Основна задача
Повільний темп	Спрощений варіант із підказками

Диференціація (за результатом)

Початковий рівень – учень визначає змінну та записує нерівність.

Середній рівень – учень правильно розв'язує нерівність.

Достатній рівень – учень інтерпретує результат у контексті задачі.

Високий рівень – учень аналізує похибки та робить узагальнення.

Приклади завдань різного рівня:

Рівень 1 (базовий)

Складіть нерівність для кількості батончиків.

Рівень 2 (середній)

Розв'яжіть нерівність і визначте максимальну кількість батончиків.

Рівень 3 (достатній)

Поясніть, чому результат змінюється, якщо врахувати похибку калорійності.

Рівень 4 (високий)

Дослідіть задачу:

- якщо калорійність батончика 135–145 ккал;

- якщо вівсянка має 300–340 ккал.

Зробіть висновок.

Приклад розширеного дослідницького завдання

Учням пропонується відповісти:

- чи зміниться відповідь, якщо спортсмен додасть банан (105 ккал);
- скільки батончиків він зможе з'їсти тоді;
- побудувати графік залежності калорійності від кількості батончиків.

Представлена задача формує математичне моделювання реального життя, навички роботи з невизначеністю; критичне мислення; здоров'язбережувальну грамотність.

1.1.4. Перевезення вантажу

Авторка: *Волкова Катерина Михайлівна, вчитель математики Черкаської гімназії №9 ім. О. М. Луценка Черкаської міської ради Черкаської області*



модернізації встановлено вантажний ліфт із системою контролю навантаження. Фірма перевозить ящики з обладнанням на 12 поверх. Відомо, що :

- у ліфті вже знаходиться контейнер масою 120 кг;
- кожен ящик із обладнанням має масу 40 кг;
- вантажопідйомність

ліфта – 500 кг;

- для економії електроенергії диспетчер дозволяє запуск ліфта лише тоді, коли загальна маса вантажу перевищує 300 кг;
- маса двох працівників, які інколи супроводжують вантаж, становить 75 кг і 82 кг (сьогодні вони не їдуть разом з вантажем);
- сам ліфт важить 1,8 т (ця інформація є технічною і на обмеження не впливає)

Задача: яку кількість ящиків можна завантажити за один рейс?

Вкажіть усі можливі значення.

Методичні рекомендації для вчителя

Завдання моделює реальну ситуацію, пов'язану з питаннями логістики та енергозбереження. Під час розв'язання проблемної задачі учні можуть працювати в групах (логісти, інженери, аудитори), виділяють суттєві та несуттєві дані, будують математичні моделі , перевіряють отримані результати. Для розвитку критичного мислення учням пропонується варіант задачі з помилковими даними, в якій потрібно знайти суперечність та пояснити чому задача не має розв'язків: вантажопідйомність ліфта — 450 кг, контейнер — 120 кг, ящики — по 40 кг. Загальна маса має бути не меншою за 300 кг і більшою за 450 кг (система умов несумісна)

Очікувані результати навчання (відповідно до НУШ)

Учень/учениця

- аналізує життєву ситуацію та виокремлює математичну проблему;
- будує математичну модель реальної ситуації;
- інтерпретує результати обчислень у реальному контексті;
- критично оцінює отримані висновки;
- аргументує власну позицію

I. Предметна компетентність (математична):

Учень/учениця розуміє зміст лінійної нерівності, інтерпретує обмеження реальної ситуації математично; виділяє змінні та величини, складає математичні моделі; розв'язує нерівності та їх системи, аналізує похибку вимірювань; використовує лінійні нерівності для розв'язання практичних задач, що потребують оцінки значень, порівняння або знаходження меж.

II. Ключові компетентності.

Підприємливість та фінансова грамотність

Розуміє раціональне використання природних ресурсів (економія електроенергії).

Інформаційно цифрова компетентність

Працює з даними задачі, складає алгоритм і діє за ним, оптимізує свою діяльність шляхом використання сучасних засобів комп'ютерної техніки.

Ініціативність і підприємливість, навчання впродовж життя

Шукає оптимальне рішення, самостійно шукає спосіб розв'язання задачі, аналізує, оцінює результати своєї навчальної діяльності.

Соціальна компетентність

Обговорює ситуацію та формулює спільні припущення, формулює власну думку, співпрацює в команді; робить вибір у життєвих ситуаціях на основі чітких критеріїв, використовуючи математичні вміння для оцінки варіантів вибору.

III. Наскрізні вміння

Під час розв'язання задачі на різних етапах уроку формуються вміння виділяти проблему, яку потрібно розв'язати, читання з розумінням, вміння аналізувати інформацію, відокремлення суттєвих даних від другорядних (етап аналізу умови), під час розв'язування задачі формується розвиток логічного мислення, аргументування; на етапі перевірки та інтерпретації результату формується вміння оцінювати результат, робити висновки; на етапі рефлексії – учень/учениця навчиться прийомам самооцінювання, аналізу власної діяльності

Розв'язання:

Позначимо n – кількість ящиків,

Тоді маса вантажу $120 + 40n$

Мінімальна економічна доцільність

$$120 + 40n > 300$$

$$40n > 180$$

$$n > 4,5$$

$$\text{отже, } n \geq 5$$

максимальна маса (вантажопідйомність)

$$120 + 40n \leq 500$$

$$40n \leq 380$$

$$n \leq 9,5$$

можливі значення
Орієнтовні критерії оцінювання

отже, $n \leq 9$
 $n = 5; 6; 7; 8; 9$

<i>Рівень</i>	<i>МАО 1 дослідження ситуації</i>	<i>МАО 2 модельовання</i>	<i>МАО 3 критичне оцінювання</i>	<i>Бали</i>
початковий	визначає окремі дані без моделі	частково розуміє умову, не виокремлює змінну	не аналізує результат	1-3
середній	виділяє проблему з допомогою	частково моделює ситуацію	частково пояснює	4-6
достатній	самостійно складає модель	знаходить правильний проміжок значень	перевіряє результат	7-9
високий	аналізує надлишкові дані	узагальнює модель, пропонує інші сценарії	виявляє помилки в умові	10-12

Варіанти диференціації (за змістом)

Базовий рівень:

- скласти нерівності за умовою;
- знайти найменше можливе значення n .

Середній рівень:

- записати математичну модель;
- побудувати числовий проміжок допустимих значень;
- пояснити чому 4 ящики не підходять.

Достатній рівень:

- знайти всі значення n ;
- побудувати графік функції : $y = 120 + 40n$ та вказати допустиму область

Високий рівень:

- якщо один працівник (75 кг) їде разом з вантажем – як зміниться відповідь?
- Скласти загальну формулу для довільних параметрів.

Варіанти диференціації (за процесом)

Рівень	Організація діяльності
Базовий	Учні працюють із підказками: таблиця даних, частково складені нерівності
Середній	Самостійне складання математичної моделі за алгоритмом
Достатній	Робота в парах: аналіз надлишкових даних та пояснення їх ролі
Високий	Самостійне формулювання подібної задачі з іншими параметрами

Варіанти диференціації (за результатом)

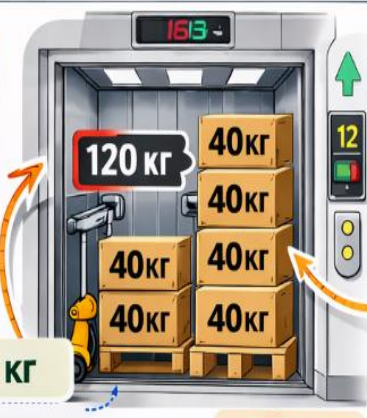
Рівень	Очікуваний результат
Початковий	Учень визначає змінну та частину умов задачі
Середній	Складає одну нерівність і знаходить приблизний результат
Достатній	Розв'язує систему нерівностей та знаходить усі допустимі значення
Високий	Пояснює результат, аналізує надлишкові дані та пропонує альтернативні сценарії

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ: Завантаження ліфта

Знайти кількість ящиків n (по 40 кг), якщо: $300 \text{ кг} < \text{Загальна маса} \leq 500 \text{ кг}$

Відомо:

- Контейнер: 120 кг
- 1 ящик: 40 кг
- Вантажопідйомність ліфта: 500 кг
- Робітники: 75 кг і 82 кг
- Ліфт: 1,8 т (не враховується)



не їдуть

Умови:

- $120 + 40n > 300$
Мінімальна маса
 $40n > 180 \Rightarrow n \geq 5$
- $120 + 40n \leq 500$
Максимальна маса 500 кг
 $40n \leq 380 \Rightarrow n \leq 9$

Математична модель:

Загальна маса: $M = 120 + 40n$ (кг)

Де n — кількість ящиків (по 40 кг)

Розв'язання:

$300 < 120 + 40n \leq 500$

$\Rightarrow 5 \leq n \leq 9$

Відповідь: $n = 5, 6, 7, 8, 9$

Перевірка:

- $n = 5 \rightarrow 320 \text{ кг} \checkmark$
- $n = 6 \rightarrow 360 \text{ кг} \checkmark$
- $n = 7 \rightarrow 400 \text{ кг} \checkmark$
- $n = 8 \rightarrow 440 \text{ кг} \checkmark$
- $n = 9 \rightarrow 480 \text{ кг} \checkmark$

1.2. Квадратична функція: вершина рішень

1.2.1. Проєктування безпечного скейт-парку

Авторка: *Науменко Інна Миколаївна, вчитель математики Золотоніської гімназії ім. С. Д. Складенка Золотоніської міської ради Черкаської області*

Міська рада планує облаштувати сучасний скейт-парк для підлітків. Одним з основних елементів майданчика є пандус для стрибків, форма якого



повинна бути плавною, симетричною та безпечною. Інженери пропонують змодельовати профіль пандуса за допомогою квадратичної функції, адже така модель дозволяє точно розрахувати висоту в будь-якій точці траєкторії.

Відомо, що:

– пандус починається і закінчується на землі (висота

дорівнює 0 м);

- максимальна висота пандуса становить 4 метри;
- довжина пандуса по землі — 8 метрів;
- найвища точка розташована посередині пандуса.

Завдання:

- 1) Створіть математичну модель пандуса.
- 2) Введіть систему координат так, щоб початок координат збігався з початком пандуса.
- 3) Побудуйте квадратичну функцію, яка описує форму пандуса.
- 4) Визначте координати вершини параболи та поясніть їх фізичний зміст.
- 5) Знайдіть, на якій відстані від початку пандуса його висота дорівнює 3 м.
- 6) Зробіть висновок, чи є пандус безпечним, якщо допустимий кут нахилу не перевищує певного значення (обґрунтуйте відповідь графічно або аналітично).

Методичні рекомендації для вчителя

1. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

Після виконання завдання учень/учениця:

- пояснює поняття квадратичної функції, її графіка та властивостей;

- розуміє зміст коефіцієнтів квадратичної функції у прикладному контексті;
- будує математичну модель реальної ситуації за допомогою квадратичної функції;
- визначає вершину параболи, нулі функції, проміжки зростання та спадання;
- інтерпретує графік у контексті життєвої задачі;
- використовує цифрові інструменти (GeoGebra, Desmos) для аналізу;
- усвідомлює практичну цінність математики для розв’язання реальних проблем;
- розвиває відповідальність за прийняті рішення (безпека середовища).

2. Перелік компетентностей, що формуються

- Математична компетентність: моделювання реальної ситуації за допомогою квадратичної функції, аналіз графіка, інтерпретація результатів.
- Громадянська компетентність: усвідомлення значення безпечного та доступного міського простору.
- Ініціативність і підприємливість: пошук оптимального рішення, оцінювання ризиків, обґрунтування вибору моделі.
- Інформаційно-цифрова компетентність: використання цифрових інструментів (GeoGebra) для побудови й аналізу моделей.

3. Перелік наскрізних вмінь, що формуються

- Критичне мислення: аналіз умов, перевірка доцільності та безпечності рішення.
- Розв’язування проблем: побудова математичної моделі та пошук оптимальної конструкції.
- Комунікація: пояснення та захист власних висновків у групі.
- Співпраця: робота в парах і малих групах.
- Творчість: візуалізація та інтерпретація реальної ситуації засобами математики.
- Відповідальність: усвідомлення наслідків проєктних рішень для безпеки людей.

4. Мотивація навчальної діяльності.

Проблемне запитання: «Чому інженери та архітектори використовують саме квадратичні функції для проєктування мостів, пандусів, арок?»

У житті пандуси рідко мають форму ідеальної параболи. Реальний пандус може не бути точною параболою, але параболічна модель дозволяє оцінити безпечність, висоту і нахил.

Парабола — це математична модель, яка дозволяє зручно: обчислювати висоту, знаходити найвищу точку, оцінювати безпечність конструкції.

5. Повне розв'язання



Умова (коротко): довжина пандуса — 8 м; висота на початку і в кінці — 0 м; максимальна висота — 4 м; вершина — посередині ($x = 4$).

Крок 1. Вибір системи координат: вісь Ox — вздовж землі; вісь Oy — вгору; початок координат — початок пандуса.

Крок 2. Запис функції: оскільки вершина в точці $(4; 4)$, маємо:

$$y = a(x - 4)^2 + 4.$$

Крок 3. Знаходимо коефіцієнт a :

Пандус починається на землі: при $x = 0, y = 0$

$$0 = a(0 - 4)^2 + 4;$$

$$0 = 16a + 4;$$

$$a = -\frac{1}{4}.$$

Крок 4. Остаточна модель:

$$y = -\frac{1}{4}(x - 4)^2 + 4.$$

Крок 5. Інтерпретація

Вершина $(4; 4)$ — найвища точка пандуса; нулі функції ($x = 0$ і $x = 8$) — місця контакту з землею; форма симетрична, безпечний спуск.

Крок 6. Висота 3 м:

$$3 = -\frac{1}{4}(x - 4)^2 + 4;$$

$$\frac{1}{4}(x - 4)^2 = 1;$$

$$(x - 4)^2 = 4;$$

$$x = 2 \text{ або } x = 6.$$

Отже, висота 3 м досягається на відстанях 2 м і 6 м від початку.

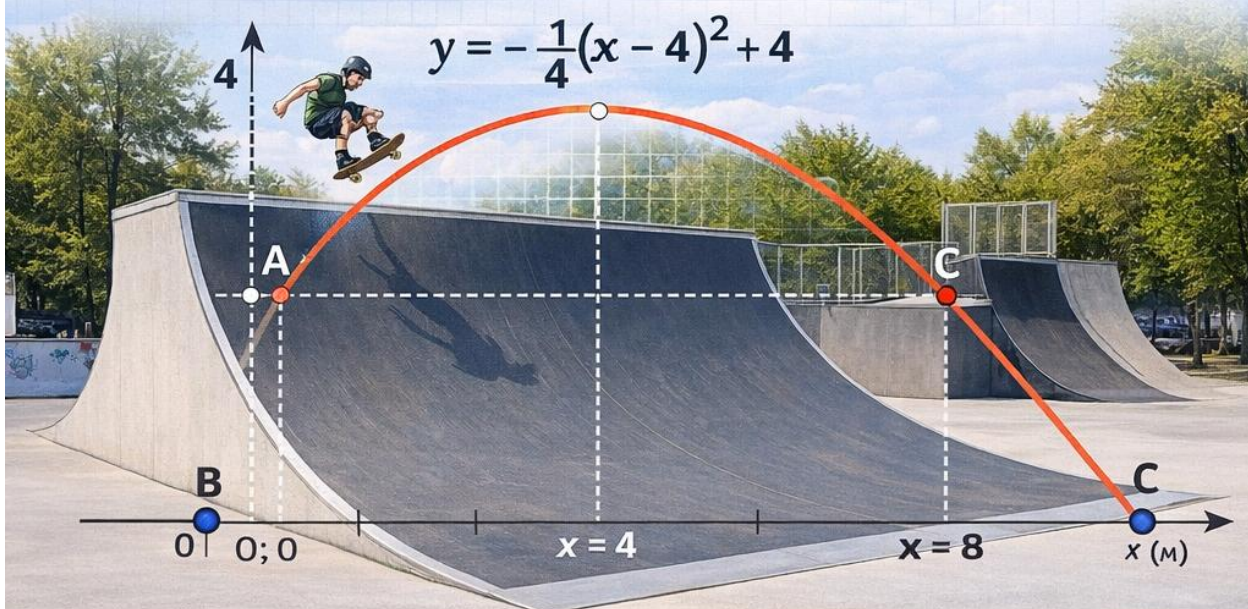
ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ КВАДРАТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

ВЕРШИНА ПАРАБОЛИ

- ✓ найвища точка пандуса
- ✓ максимальна висота спортсмена
- ✓ зміна підйому на спуск

НУЛІ ФУНКЦІЇ

- ✓ початок і кінець пандуса
- ✓ точки старту і приземлення спортсмена



НУЛІ ФУНКЦІЇ

- ✓ початок і кінець пандуса
- ✓ точки старту і приземлення спортсмена

ПРОМІЖКИ ЗРОСТАННЯ і СПАДАННЯ



ЗРОСТАННЯ

- ✓ від 0 до 4
– підйом

СПАДАННЯ

- ✓ від 4 до 8
– спуск

6. Критерії оцінювання

<i>Рівень / Бали</i>	<i>[MAO 1] Дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів</i>	<i>[MAO 2] Моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язання проблемних ситуацій</i>	<i>[MAO 3] Критичне оцінювання процесу та результату розв'язання проблемних ситуацій</i>
Початковий 1–3 бали	Розуміє життєву ситуацію частково; потребує постійної допомоги; не виокремлює математичну проблему самостійно	За зразком записує окремі елементи моделі без розуміння зв'язків	Не оцінює результат або робить формальні висновки
Середній 4–6 балів	За підказкою визначає проблему та ключові дані; встановлює зв'язок із квадратичною функцією	Складає модель з допомогою вчителя; виконує обчислення з незначними помилками	Дає короткий висновок без обґрунтування
Достатній 7–9 балів	Самостійно аналізує ситуацію, коректно формулює математичну проблему	Самостійно будує модель (функцію, графік), обирає доцільну стратегію розв'язання	Оцінює правильність результату, пояснює отримані дані
Високий 10–12 балів	Глибоко аналізує ситуацію, пропонує альтернативні підходи або уточнення проблеми	Творчо моделює, використовує цифрові інструменти, оптимізує модель	Критично оцінює процес і результат, аргументує безпечність рішення

Додаткові бали — за презентацію або цифрову модель.

7. Можливі варіанти диференціації

Для учнів, які потребують підтримки: надати шаблон функції, виконувати завдання поетапно, дозволити використання готового графіка.

Базовий рівень: побудувати функцію, знайти вершину і нулі, зробити короткий висновок.

Для сильних учнів: дослідити вплив зміни коефіцієнта a , порівняти кілька моделей пандусів, обґрунтувати безпечність через похідну (нахил).

8. Міжпредметна інтеграція

- Фізика – швидкість руху по пандусу;
- Інформатика – комп'ютерне моделювання;
- Громадянська освіта – безпечний міський простір.

1.2.2. Сонячні панелі: де енергія працює на максимум?

Авторка: *Науменко Інна Миколаївна, вчитель математики Золотоніської гімназії ім. С. Д. Скляренка Золотоніської міської ради Черкаської області*

Місцева громада планує встановити сонячні панелі на даху школи, щоб зменшити витрати на електроенергію та зробити заклад більш екологічним. Інженери пояснили, що кількість електроенергії, яку виробляє сонячна панель протягом дня, залежить від висоти Сонця над горизонтом, а отже — від часу доби.



Для спрощення розрахунків фахівці запропонували математичну модель, за якою потужність вироблення електроенергії (у кВт) протягом сонячного дня можна

описати квадратичною функцією.

Однак, частина даних є неповною, деякі значення — наближеними, а деякі параметри доведеться обґрунтувати самостійно, використовуючи логіку, графік та властивості квадратичної функції.

Ви — команда учнів, які виконують роль аналітиків енергетичного проєкту. Від ваших висновків залежить, чи буде проєкт економічно доцільним.

Відомо, що:

- сонячні панелі починають працювати о 7:00;
- після 19:00 вироблення електроенергії припиняється;
- максимальна потужність досягається опівдні;
- залежність потужності P (у кВт) від часу t (у годинах) описується

квадратичною функцією:

$$P(t) = a(t - 13)^2 + b.$$

де t — час доби (у годинах)

$a < 0$;

b — максимальна потужність панелей.

Також відомо, що:

- о 9:00 потужність становить 4 кВт;
- о 17:00 потужність така сама, як і о 9:00.

Завдання:

1) Поясніть, чому дана ситуація може бути змодельована квадратичною функцією.

2) Знайдіть коефіцієнти a і b , використовуючи подані дані.

- 3) Побудуйте графік функції та поясніть фізичний зміст:
 - вершини параболи;
 - нулів функції;
 - проміжків зростання і спадання.
- 4) Визначте, у який проміжок часу панелі працюють з потужністю не менше 6 кВт.
- 5) Зробіть висновок для громади:
 - у які години вироблення електроенергії є найбільш ефективним;
 - чи доцільно використовувати накопичувачі енергії.
- 6) (Додатково) Запропонуйте, як зміниться модель:
 - у хмарний день;
 - взимку;
 - при зміні кута нахилу панелей.

Методичні рекомендації для вчителя

1. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

Після виконання задачі учень / учениця:

- 1) Моделює реальні ситуації засобами математики
 - розпізнає залежність між фізичною величиною (потужністю) та часом;
 - обґрунтовує доцільність використання квадратичної функції для опису реального процесу;
 - складає математичну модель ситуації з урахуванням обмежень області визначення.
- 2) Працює з функціями та їх графіками
 - визначає елементи квадратичної функції (коефіцієнти, вершину, вісь симетрії, нулі);
 - будує графік квадратичної функції за заданою або знайденою формулою;
 - аналізує графік у контексті задачі (інтерпретує зростання, спадання, максимум).
- 3) Застосовує математичні знання для розв'язування практичних задач
 - знаходить проміжки часу, у яких значення функції задовольняють задані умови;
 - використовує нерівності для визначення ефективних режимів роботи сонячних панелей;
 - робить обґрунтовані висновки на основі результатів обчислень і графічного аналізу.
- 4) Використовує цифрові інструменти (GeoGebra, Desmos) для аналізу.
- 5) Аналізує дані та робить висновки
 - працює з табличними, графічними та формульними даними;
 - порівнює математичну модель із реальними умовами;

— оцінює достовірність результатів, розуміє наближений характер моделі.

2. Перелік компетентностей, що формуються

- Математична компетентність: уміння будувати й аналізувати математичні моделі реальних процесів, інтерпретувати результати обчислень.

- Компетентності в галузі природничих наук і технологій: розуміння принципів використання відновлюваних джерел енергії та їх практичного застосування.

- Інформаційно-цифрова компетентність: використання цифрових інструментів (GeoGebra) для дослідження, візуалізації та аналізу даних.

- Підприємливість та фінансова грамотність: оцінювання доцільності та ефективності інвестиційних рішень на основі математичних розрахунків.

- Екологічна компетентність: усвідомлення ролі альтернативної енергетики у сталому розвитку.

3. Перелік наскрізних вмінь, що формуються

- Критичне мислення — аналіз умов задачі, оцінювання достовірності даних і результатів моделювання.

- Розв'язування проблем — пошук оптимального рішення реальної прикладної ситуації.

- Уміння аргументувати та робити висновки — обґрунтування прийнятого рішення на основі математичних доказів.

- Командна взаємодія — спільна робота під час обговорення результатів і прийняття рішень.

- Ініціативність та відповідальність — усвідомлення особистої ролі у прийнятті рішень, що мають суспільне значення.

- Навчання впродовж життя — застосування математичних знань у нових і незнайомих контекстах.

4. Мотивація навчальної діяльності

Сьогодні майже кожна школа, громада чи будинок думають про енергоефективність. Сонячні панелі здаються простим рішенням, але насправді постає питання: «Коли вони справді працюють найкраще — і як це довести?»; «Чи завжди більше Сонця означає більше електроенергії? Чому вироблення зростає, а потім зменшується, навіть якщо Сонце світить увесь день? І головне — як це можна передбачити заздалегідь, не встановлюючи панелі?»

Проблемне запитання: Як за допомогою графіка і формули визначити, у які години сонячні панелі дають максимальну користь і чи вигідно встановлювати їх на даху школи?

5. Повне розв'язання

Залежність потужності сонячних панелей від часу: зростає зранку, досягає максимуму опівдні, спадає ввечері, є симетричною відносно полудня.

Отже, процес доцільно описати квадратичною функцією, графік якої — парабола, гілки вниз (використання графічного калькулятора GeoGebra).



Задано модель:

$$P(t) = a(t - 13)^2 + b, \text{ де } a < 0.$$

Тут:

t — час (год);

$P(t)$ — потужність (кВт);

вершина параболи має координати $(13; b)$.

Відомо:

- о **9:00** потужність **4 кВт**;
- о **17:00** потужність така сама (симетрія підтверджується).

Підставимо $t = 9$ у формулу:

$$\begin{aligned} 4 &= a(9 - 13)^2 + b; \\ 4 &= 16a + b. \end{aligned} \quad (1)$$

Панелі:

- починають працювати о 7:00,
- припиняють о 19:00.

Отже:

$$P(7) = 0 \text{ та } P(19) = 0.$$

Підставимо $t = 7$:

$$\begin{aligned} 0 &= a(7 - 13)^2 + b; \\ 0 &= 36a + b; \\ 36a + b &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Віднімемо (1) від (2):

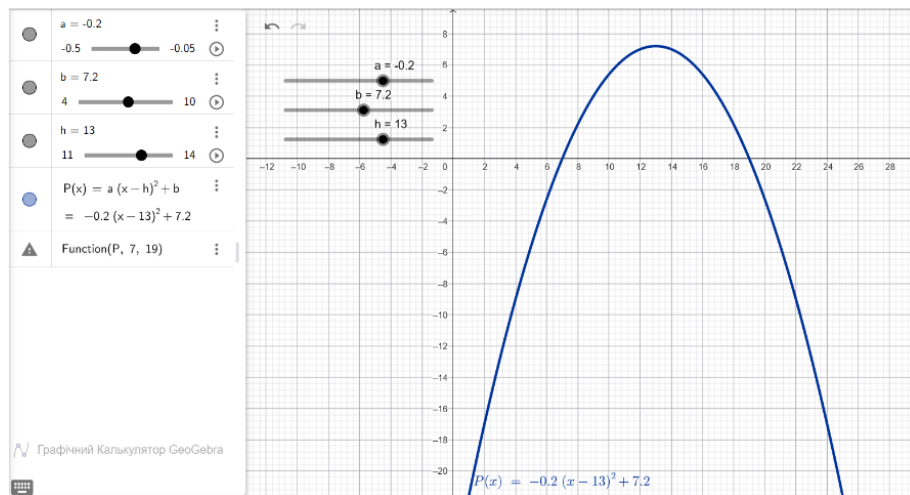
$$\begin{aligned} (36a + b) - (16a + b) &= 0 - 4; \\ 20a &= -4; \\ a &= -0,2. \end{aligned}$$

Підставимо у (1) рівняння:

$$\begin{aligned} 16 \cdot (-0,2) + b &= 4; \\ -3,2 + b &= 4; \\ b &= 7,2. \end{aligned}$$

Остаточна модель:

$$P(t) = -0,2(t - 13)^2 + 7,2.$$



Аналіз:

Вершина параболи: (13; 7,2). Отже, максимальна потужність — 7,2 кВт о 13:00.

Нулі функції:

$$\begin{aligned} -0,2(t-13)^2 + 7,2 &= 0; \\ (t-13)^2 &= 36; \\ t &= 7 \quad \text{або} \quad t = 19. \end{aligned}$$

Панелі працюють з 7:00 до 19:00.

Коли потужність не менше 6 кВт?

Розв'яжемо нерівність:

$$\begin{aligned} -0,2(t-13)^2 + 7,2 &\geq 6; \\ -0,2(t-13)^2 &\geq -1,2; \\ (t-13)^2 &\leq 6; \\ |t-13| &\leq \sqrt{6}; \\ t &\in [13 - \sqrt{6}; 13 + \sqrt{6}]. \end{aligned}$$

Обчислимо наближено:

$$\begin{aligned} \sqrt{6} &\approx 2,45 \\ t &\in [10,55; 15,45]. \end{aligned}$$

Отже, панелі найефективніші приблизно з 10:30 до 15:30.

Висновок для громади:

- Максимальна ефективність роботи — близько полудня.
- Найдоцільніше використовувати електроенергію:
 - у середині дня;
 - або застосовувати накопичувачі енергії для вечірніх годин.
- Квадратична модель добре описує процес, але:
 - не враховує хмарність;

- сезонні зміни;
- кут нахилу панелей.



6. Критерії оцінювання

Рівень / Бали	[MAO 1] Дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів	[MAO 2] Моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язання проблемних ситуацій	[MAO 3] Критичне оцінювання процесу та результату розв'язання проблемних ситуацій
Початковий 1–3 бали	Відтворює окремі дані з умови задачі без аналізу; проблема не сформульована або сформульована неточно	Використовує готову модель без розуміння її змісту; обчислення фрагментарні	Не аналізує результат; висновок відсутній або формальний
Середній 4–6 балів	Частково аналізує ситуацію; формулює проблему з допомогою вчителя	Будує модель квадратичної функції за зразком; виконує основні обчислення	Дас простий висновок без глибокого обґрунтування; не враховує обмеження моделі
Достатній 7–9 балів	Самостійно виокремлює проблему, визначає змінні та припущення	Коректно будує математичну модель (функцію, графік), застосовує її для розв'язання	Аналізує результат, пояснює його зміст у контексті задачі, робить аргументований висновок
Високий 10–12 балів	Глибоко аналізує ситуацію, формулює проблему з урахуванням реального контексту та надлишкових/неповних даних	Самостійно обирає й обґрунтовує модель, використовує цифрові інструменти (GeoGebra), пропонує альтернативні сценарії	Критично оцінює модель і результат, визначає її обмеження, пропонує шляхи вдосконалення або уточнення даних

7. Можливі варіанти диференціації

Для учнів, які потребують підтримки:

- працюють з готовою формулою квадратичної функції;
- визначають вершину, нулі, проміжки зростання і спадання;
- роблять простий висновок: коли панелі працюють найкраще.

Для більшості учнів:

- самостійно будують графік (GeoGebra / вручну);
- складають таблицю значень;
- оцінюють тривалість ефективної роботи панелей.

Для учнів з високою навчальною мотивацією:

- аналізують площу під графіком як наближену кількість енергії;
- порівнюють модель з реальними даними сонячної генерації в

Україні;

- пропонують вдосконалення моделі.

8. Міжпредметна інтеграція

Фізика: поняття потужності, енергії, часу, залежність вироблення енергії від куту падіння сонячних променів, добовий цикл Сонця, інсоляція.

Географія: кліматичні умови України, тривалість світлового дня в різні пори року, сонячна активність та її регіональні відмінності.

Інформатика: використання GeoGebra для моделювання, робота з цифровими графіками й таблицями, візуалізація даних.

Екологія / Громадянська освіта: відновлювані джерела енергії, зменшення викидів CO₂, енергетична незалежність громади.

Економіка / Фінансова грамотність: економічна доцільність інвестицій, аналіз вигоди та окупності, раціональне використання ресурсів.

Технології / STEM: принципи роботи сонячних панелей, інженерне мислення, оптимізація технічних рішень.

Українська мова: формулювання аргументованих висновків, усне та письмове представлення результатів, робота з науково-популярним текстом.

1.2.3. Оптимальний режим нагріву електрочайника

Авторка: *Науменко Інна Миколаївна, вчитель математики Золотоніської гімназії ім. С. Д. Скляренка Золотоніської міської ради Черкаської області*



Шкільна команда з екологічного проєкту досліджує, як змінюється витрата електроенергії під час роботи електричного чайника в різних режимах нагріву.

Учні помітили, що якщо чайник працює занадто слабо, вода гріється довго і загальні витрати енергії зростають. Якщо ж занадто інтенсивно, енергія також витрачається неекономно через втрати тепла.

Після серії вимірювань з'ясувалося, що найменша витрата електроенергії досягається при певному оптимальному режимі нагріву.

Для аналізу результатів потрібно побудувати математичну модель залежності витрат електроенергії від інтенсивності нагріву.

Математична модель

Позначимо: x – відхилення інтенсивності нагріву від оптимального режиму (умовні одиниці), y – витрата електроенергії (кВт/год).

У момент оптимального режиму витрати мінімальні, отже:

- графік залежності має мінімум;
- модель описується квадратичною функцією з вітками вгору.

Загальний вигляд:

$$y = ax^2 + b.$$

За експериментальними даними:

- при оптимальному режимі ($x = 0$) витрати становлять 1,2 кВт/год;
- при відхиленні на 2 одиниці в будь-який бік витрати зростають до 1,6 кВт/год.

Завдання

- 1) Поясни, чому цю залежність доцільно описувати квадратичною функцією.
- 2) Визнач, який фізичний зміст має вершина параболи.
- 3) Побудуй графік функції та опиши його властивості.
- 4) Знайди, при яких відхиленнях від оптимального режиму витрати електроенергії становитимуть 1,4 кВт·год.

5) Зроби висновок, чому навіть незначні відхилення від оптимального режиму призводять до збільшення витрат.

Методичні рекомендації для вчителя

1. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

Учень / учениця:

- розпізнає ситуації з реального життя, що моделюються квадратичною функцією;
- пояснює, чому залежність має вигляд параболи з вітками, спрямованими вгору;
- будує та аналізує графік квадратичної функції;
- визначає вершину параболи та інтерпретує її як оптимальне (мінімальне) значення величини;
- застосовує квадратичну функцію для розв'язання практичних задач;
- робить обґрунтовані висновки на основі математичної моделі.

2. Перелік компетентностей, що формуються

- Математична компетентність: застосування квадратичної функції для моделювання реальних процесів, аналіз і інтерпретація графіків.
- Компетентності в природничих науках і технологіях: розуміння енергетичних процесів, використання математичної моделі для пояснення явищ.
- Екологічна грамотність і здорове життя: усвідомлення раціонального використання електроенергії та відповідального споживання ресурсів.
- Ініціативність і підприємливість: аналіз ефективності рішень, вибір оптимального режиму з урахуванням наслідків.

3. Перелік наскрізних вмінь, що формуються (soft skills)

- Критичне мислення: аналіз залежностей, оцінювання доцільності вибору моделі, формулювання висновків.
- Уміння розв'язувати проблеми: перехід від життєвої ситуації до математичної моделі та назад.
- Дослідницькі вміння: аналіз даних, робота з графіками, пошук оптимального значення.
- Комунікативні вміння: усне й письмове пояснення міркувань, аргументація результатів.
- Інформаційно-цифрова грамотність: використання графіків, таблиць, цифрових інструментів для аналізу даних.

4. Мотивація навчальної діяльності

Уявіть, що ви вмикаєте електричний чайник удома. Здається, що все просто: натиснув кнопку — і вода закипіла. Але чи замислювалися ви, чи завжди швидше означає економніше?

Іноді, якщо прилад працює занадто слабо — витрачається багато часу й електроенергії. Якщо ж занадто інтенсивно — зростають втрати тепла.

Отже, існує певний режим, за якого витрати є найменшими.

Сьогодні ми спробуємо з'ясувати, як за допомогою математики знайти цей баланс і навчитися описувати подібні ситуації за допомогою квадратичної функції.

Проблемне запитання: Чи можна за допомогою графіка та формули передбачити, при якому режимі роботи електроприладу витрати електроенергії будуть мінімальними?

5. Повне розв'язання

Крок 1. Аналіз умови

Нехай: x – відхилення інтенсивності нагріву від оптимального режиму (умовні одиниці); y – витрата електроенергії (кВт/год).

Відомо: при оптимальному режимі витрати найменші; при відхиленні від оптимального режиму витрати зростають.

Отже, залежність між x і y має вигляд параболи з мінімумом, тобто описується квадратичною функцією з вітками, спрямованими вгору.

Крок 2. Вибір виду квадратичної функції

Оскільки мінімум досягається при $x = 0$, зручно використовувати вигляд:

$$y = ax^2 + b.$$

З умови, при $x = 0$: $y = 1,2 \rightarrow b = 1,2$.

Маємо: $y = ax^2 + 1,2$.

Крок 3. Знаходження коефіцієнта a

З умови: при відхиленні на 2 одиниці ($x = \pm 2$) витрати становлять 1,6 кВт/год.

Підставимо $x = 2$:

$$1,6 = a \cdot 2^2 + 1,2;$$

$$1,6 = 4a + 1,2;$$

$$4a = 0,4;$$

$$a = 0,1.$$

Крок 4. Формула функції

Отже, залежність витрат електроенергії від режиму нагріву описується функцією:

$$\boxed{y = 0,1x^2 + 1,2}$$

Крок 5. Дослідження властивостей функції

- Коефіцієнт $a = 0,1 > 0$, тому парабола напрямлена вітками вгору;
- вершина параболи: $x = 0$, $y = 1,2$.

Це означає, що мінімальні витрати електроенергії дорівнюють 1,2 кВт/год і досягаються при оптимальному режимі.

Крок 6. Побудова графіка

Для побудови графіка достатньо кількох точок:

x	-2	-1	0	1	2
y	1,6	1,3	1,2	1,3	1,6

Графік — парабола, симетрична відносно осі Oy , з вершиною в точці $(0;1,2)$.

Крок 7. Розв'язання практичного запитання

Знайти, при яких відхиленнях витрати становлять 1,4 кВт/год.

Розв'язуємо рівняння:

$$0,1x^2 + 1,2 = 1,4;$$

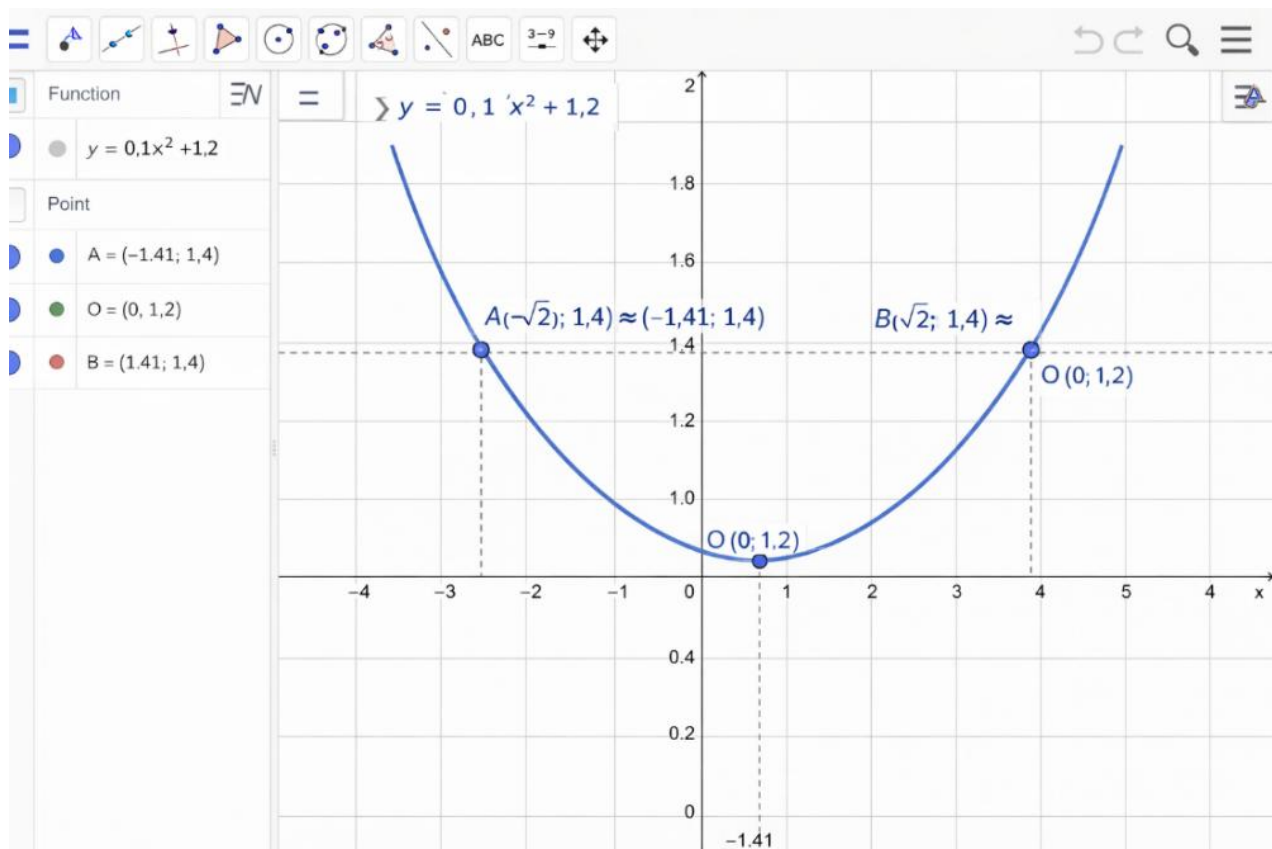
$$0,1x^2 = 0,2;$$

$$x^2 = 2;$$

$$x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,41.$$

Відповідь: Витрати 1,4 кВт/год будуть при відхиленні від оптимального режиму приблизно на 1,4 одиниці в будь-який бік.

Висновок: Мінімальні витрати електроенергії досягаються при оптимальному режимі нагріву. Будь-яке відхилення від нього призводить до зростання витрат, що наочно демонструє графік квадратичної функції.



Фізичний зміст вершини параболи

У цій задачі графік залежності витрат електроенергії

$$y = 0,1x^2 + 1,2$$

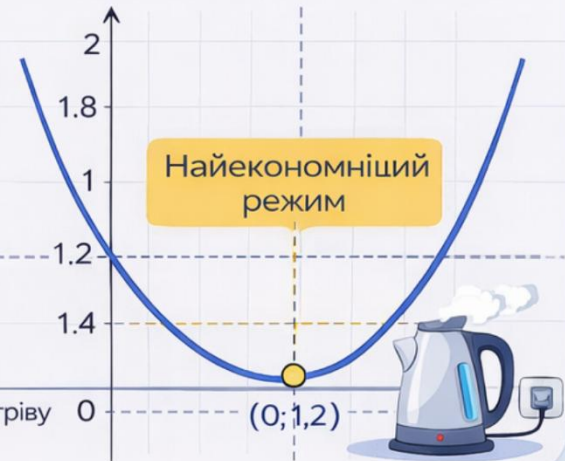


• $(0; 1,2)$ – оптимальний режим нагріву, за якого витрати найменші.



• будь-яке відхилення від цієї точки призводить до зростання витрат.

відхилення інтенсивності нагріву



Властивості графіка квадратичної функції

1 Форма графіка

- Парабола з вітками, спрямованими вгору ($a > 0$).

2 Вісь симетрії

- Графік симетричний відносно осі Oy.

3 Мінімум функції

- Найменше значення: $y_{\min} = 1,2$.

4 Монотонність

- при $x < 0$ функція спадає
- при $x > 0$ функція зростає.

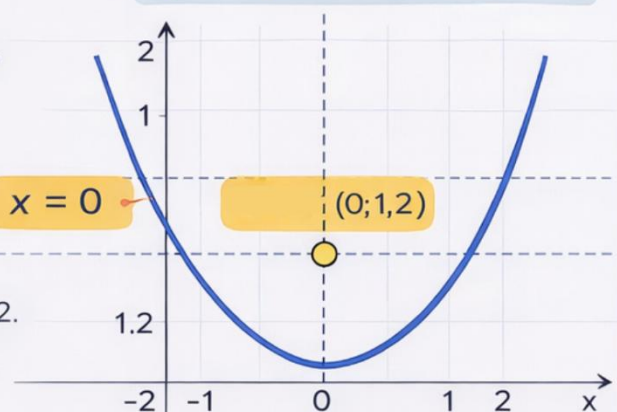
5 Область визначення

- $x \in \mathbb{R}$ (всі можливі режими нагріву).



Вершина параболи показує **найекономніший** режим роботи приладу.

$$y = 0,1x^2 + 1,2$$



5 Область визначення

- $x \in \mathbb{R}$ (всі можливі режими нагріву).

6 Область значень

- $y \geq 1,2$ (значення не менші за 1,2).

6. Критерії оцінювання

Під час оцінювання варто враховувати не лише правильність обчислень, а й уміння учня/учениці пояснювати вибір моделі, інтерпретувати вершину параболи та робити змістовні висновки.

Рівень / Бали	[MAO 1] Дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів	[MAO 2] Моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язання проблемних ситуацій	[MAO 3] Критичне оцінювання процесу та результату розв'язання проблемних ситуацій
Початковий 1–3 бали	Впізнає математичну тему, але не може чітко сформулювати проблему або мету задачі	Записує окремі елементи (формулу, графік) з помилками або без пояснень	Не робить висновків або вони не пов'язані з умовою задачі
Середній 4–6 балів	Формулює проблему з допомогою вчителя, розуміє, що йдеться про мінімум функції	Будує квадратичну функцію за зразком, частково правильно виконує обчислення	Робить простий висновок без аргументації або з неточностями
Достатній 7–9 балів	Самостійно виокремлює проблему та пояснює, чому її можна розв'язати математично	Правильно будує модель (формула, графік), знаходить вершину, розв'язує практичне запитання	Аналізує результат, пояснює його зміст у реальному контексті
Високий 10–12 балів	Чітко формулює проблему, обґрунтовує вибір математичного методу	Самостійно та коректно моделює ситуацію, обґрунтовує кожен крок	Критично оцінює результат, робить узагальнений висновок, оцінює доцільність моделі

7. Можливі варіанти диференціації

Для учнів, які потребують чіткого алгоритму (початковий рівень)

Завдання:

- 1) Записати функцію $y = 0,1x^2 + 1,2$.
- 2) Знайти координати вершини параболи.
- 3) Побудувати графік за готовою таблицею значень.
- 4) Вказати, при якому значенні x витрати найменші.

Підтримка:

- готовий шаблон таблиці;
- підказка щодо вигляду функції;
- частково заповнений графік.

Для учнів, які мають середній та достатній рівень

Завдання:

- 1) Самостійно побудувати математичну модель за умовою.
- 2) Побудувати графік функції.
- 3) Знайти, при яких відхиленнях витрати становлять 1,4 кВт/год.
- 4) Зробити короткий письмовий висновок.

Підтримка:

- нагадування формули квадратичної функції;
- опорні запитання.

Для учнів, які мають високий рівень

Завдання:

- 1) Запропонувати іншу функцію виду $y = ax^2 + b$ з тим самим мінімумом.
- 2) Дослідити, як зміниться графік при подвоєнні коефіцієнта a .
- 3) Пояснити, який режим є «безпечнішим» з точки зору енергоспоживання.
- 4) Зробити узагальнений висновок.

8. Міжпредметна інтеграція

Фізика: залежність витрат енергії від режиму роботи приладу, поняття енергії, потужності, ефективності, оптимальний режим роботи приладів, мінімум енергоспоживання.

Природничі науки / Екологія: раціональне використання ресурсів енергозбереження, зменшення викидів CO₂, відповідальне споживання.

Економіка / Фінансова грамотність: оптимізація витрат, порівняння режимів споживання, прийняття економічно доцільних рішень.

Інформатика: цифрове моделювання, побудова графіків у GeoGebra, аналіз моделей, використання ІКТ для дослідження.

Технології / STEM: оптимізація процесів, пошук найефективніших режимів роботи, інженерне мислення, аналіз «що буде, якщо...».

Українська мова: формулювання висновків, пояснення математичних результатів, робота з інфографікою.

Громадянська освіта: усвідомлене споживання, прийняття рішень на основі даних, особиста відповідальність.

1.3. Квадратні нерівності: логіка інтервалів

1.3.1. Бізнес-ідея: прокат електросамокатів у місті

Авторка: *Бедусенко Ольга Сергіївна, вчитель математики
Леськівського ліцею з початковою школою та гімназією
Леськівської сільської ради Черкаського району
Черкаської області*

Учень 9 класу Андрій вирішив відкрити сезонний прокат електросамокатів у своєму місті. Він проаналізував витрати та доходи й



отримав таку модель прибутку.

Очікуваний прибуток (у тис. грн) залежить від кількості самокатів x і обчислюється за формулою:

$$P(x) = -2x^2 + 40x - 150$$

де

x — кількість закуплених самокатів (одиниць),

$P(x)$ — прибуток за сезон (у тис. грн).

Завдання:

1. Визначте, при якій кількості самокатів прибуток буде не меншим за 50 тис. грн.
2. Знайдіть, при яких значеннях x бізнес буде прибутковим (тобто $P(x) > 0$).
3. Андрій може придбати не більше 15 самокатів через обмежений бюджет. Чи зможе він отримати прибуток не менше 60 тис. грн? Обґрунтуйте відповідь.
4. Знайдіть максимальний можливий прибуток та відповідну кількість самокатів.
5. Поясніть економічний зміст отриманих розв'язків (чому при дуже великій кількості самокатів прибуток зменшується?).

Методичні рекомендації для вчителя

Очікувані результати навчання

I. Предметна компетентність (математична)

Учень/учениця:

- пояснює зміст поняття **квадратна нерівність**;
- розв'язує квадратні нерівності різними способами (через дискримінант, метод інтервалів, графічно);
- знаходить нулі квадратичної функції;
- встановлює проміжки знакосталості квадратичної функції;
- застосовує квадратні нерівності до розв'язування практичних задач;

- інтерпретує отримані результати з урахуванням змісту задачі (економічний контекст).

II. Ключові компетентності

1. Підприємливість і фінансова грамотність

- аналізує прибутковість бізнес-моделі;
- оцінює ризики при збільшенні витрат;
- визначає оптимальну кількість ресурсів.

2. Інформаційно-цифрова компетентність

- будує графік квадратичної функції (GeoGebra, Desmos, Excel);
- аналізує поведінку функції за графіком.\

3. Логічне мислення

- формулює послідовність розв'язування;
- робить аргументовані висновки.

Мотивація навчальної діяльності. Перед тим як вкладати гроші, підприємець має відповісти на головне питання: чи варто це робити взагалі?

Проблемне запитання: «Чи може бізнес бути невигідним навіть при великій кількості клієнтів?».

У житті витрати можуть зростати швидше, ніж доходи. Квадратична модель допомагає: порівнювати витрати і доходи, прогнозувати результат, приймати обґрунтовані рішення.

Розв'язання:

Маємо функцію прибутку: $P(x) = -2x^2 + 40x - 150$

1. Прибуток не менший за 50 тис. грн

Розв'яжемо нерівність: $-2x^2 + 40x - 150 \geq 50$

Перенесемо: $-2x^2 + 40x - 200 \geq 0$

Ділимо на -2 (змінивши знак нерівності): $x^2 - 20x + 100 \leq 0$

Розклад: $(x - 10)^2 \leq 0$

Отже, $x = 10$

Прибуток не менший за 50 тис. грн лише при 10 самокатах.

2. Коли бізнес прибутковий ($P(x) > 0$)

$$-2x^2 + 40x - 150 > 0$$

Помножимо на -1: $-2x^2 - 40x + 150 < 0$

Поділимо на 2: $x^2 - 20x + 75 > 0$

Знаходимо корені: $D = 100$, $x_1 = 5$, $x_2 = 15$

Оскільки парабола вітками вгору, то нерівність виконується між коренями $5 < x < 15$.

Отже, бізнес прибутковий при кількості самокатів від 6 до 14 (цілі значення).

3. Чи можливий прибуток ≥ 60 тис. грн при $x \leq 15$?

Розв'язуємо: $-2x^2 + 40x - 150 \geq 60$

$$-2x^2 + 40x - 210 \geq 0$$

Ділимо на -2: $x^2 - 20x + 105 \leq 0$ $D = -20$

Оскільки дискримінант від'ємний, то розв'язків немає.

Отже, отримати 60 тис. грн неможливо.

4. Максимальний прибуток

Формула вершини: $x_0 = \frac{-b}{2a} = 10$

Обчислюємо: $P(10) = -2(100) + 40 - 150, P(10) = 50$.

Отже, максимальний прибуток – 50 тис. грн при 10 самокатах.

Орієнтовні критерії оцінювання

Рівень / Бали	МАО 1. Дослідження ситуації	МАО 2. Моделювання	МАО 3. Оцінювання результату
Початковий / 1–3 бали	Розуміє ситуацію частково; потребує допомоги; не виділяє проблему	За зразком записує окремі елементи без розуміння	Не оцінює результат або дає формальну відповідь
Середній / 4–6 балів	За підказкою визначає проблему; встановлює зв'язок із функцією	Складає модель з допомогою; допускає незначні помилки	Дає короткий висновок без пояснення
Достатній / 7–9 балів	Самостійно аналізує ситуацію; формулює математичну проблему	Самостійно будує модель; обирає спосіб розв'язання	Пояснює результат, оцінює правильність
Високий / 10–12 балів	Глибоко аналізує; пропонує альтернативи	Творчо будує модель; оптимізує розв'язання	Аргументує рішення; оцінює доцільність

Максимум: 12 балів

Можливі варіанти диференціації

1. За рівнем складності

Для учнів початкового рівня:

- надати підказки (формулу дискримінанта, алгоритм методу інтервалів);

- дозволити користуватись графіком.

Для учнів достатнього рівня:

- запропонувати самостійно побудувати графік функції;

- пояснити економічний зміст кожного інтервалу.

Для високого рівня:

- змінити коефіцієнти функції;

- дослідити, як зміниться оптимальна кількість при інших витратах;

- скласти власну модель бізнесу з квадратною функцією.

2. За формою роботи

- Індивідуальна робота

- Робота в парах (аналіз графіка + економічне пояснення)

- Міні-проект: «Чи вигідно відкривати прокат у нашому місті?»

3. За результатом

Обов'язковий результат: розв'язати квадратні нерівності.

Додатковий результат:

- створити графік функції;

- підготувати короткий фінансовий аналіз;
- змодельовати інший бізнес із квадратною залежністю.

Міжпредметна інтеграція

Економіка – прибуток, витрати, ефективність бізнесу.

Інформатика – побудова графіків, комп'ютерне моделювання процесів.

Громадянська освіта – розвиток міської інфраструктури, відповідальне підприємництво.

Фінансова грамотність – планування витрат і доходів, прийняття обґрунтованих рішень.



ЕКОНОМІЧНИЙ ЗМІСТ

КВАДРАТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

ПРОКАТ ЕЛЕКТРОСАМОКАТІВ У МІСТІ

★ ВЕРШИНА ПАРАБОЛИ

- 🏆 Максимальний прибуток
- 🚲 Найвигідніша кількість самокатів
- 🎯 Оптимальне рішення для бізнесу

✓ НУЛІ ФУНКЦІЇ

- 💰 Прибуток дорівнює нулю
- ⬆️⬆️ Межі між збитком і прибутком
- 📍 «Точки беззбитковості»

📈 ФУНКЦІЯ ПРИБУТКУ



$P(x) = -2x^2 + 40x - 150$

x — кількість самокатів (шт.)

$P(x)$ — прибуток (тис. грн)



↔️ ПРОМІЖКИ ЗРОСТАННЯ І СПАДАННЯ

↑ ЗРОСТАННЯ

- ➕ Прибуток зростає
- 🚀 Бізнес розвивається
- ⚙️ Ефективне використання ресурсів

(до оптимальної кількості)

↓ СПАДАННЯ

- ➖ Прибуток зменшується
- 🔧 Витрати > Доходів
- 📉 Бізнес менш ефективний

💰 ПРИБУТКОВІСТЬ

- ✅ Прибутковий: $P(x) > 0$
- ❌ Збитковий: $P(x) < 0$
- 🛡️ Знайти «безпечний діапазон» x

💡 ЕКОНОМІЧНИЙ ЗМІСТ

Квадратична функція дозволяє:

- ✅ Передбачити прибуток
- ✅ Знайти оптимальну кількість
- ✅ Уникнути збитків
- ✅ Приймати рішення

💡 ВАЖЛИВА ІДЕЯ!

У реальному житті прибуток не зростає безкінечно!

➡️ Більше самокатів → більше витрат (ремонт, обслуговування, зберігання)

📅 Після певного моменту прибуток починає **ЗМЕНШУВАТИСЬ**



1.3.2. Проєкт «Безпечна висота дрона»

Авторка: *Бедусенко Ольга Сергіївна, вчитель математики
Леськівського ліцею з початковою школою та гімназією
Леськівської сільської ради Черкаського району
Черкаської області*

Під час навчань із керування дроном курсанти моделюють траєкторію польоту безпілотної.



Висота дрона над землею (у метрах) залежить від часу польоту (у секундах) за формулою:

$$h(t) = -2t^2 + 16t,$$

де t — час польоту (с),

$h(t)$ — висота над землею (м).

Завдання

1. Визначте, протягом якого часу дрон перебуває на висоті не нижче 20 метрів.
2. Знайдіть, у який проміжок часу висота дрона перевищує 24 метри.
3. Для безпечного польоту необхідно, щоб дрон не опускався нижче 5 метрів. Визначте проміжок часу безпечного польоту.
4. Знайдіть максимальну висоту польоту та момент часу, коли її досягнуто.
5. Дослідницьке завдання. Через сильний вітер траєкторія змінилася:
 $h(t) = -2t^2 + 12t$

Як зміниться: 1) максимальна висота? 2) час безпечного польоту?

Поясніть, не виконуючи повного розв'язання.

Очікувані результати навчання

I. Предметні результати (математична компетентність)

Учень/учениця:

- розпізнає квадратну функцію та її графік (параболу);
- розв'язує квадратні нерівності методом інтервалів;
- знаходить нулі функції;
- визначає проміжки знакосталості функції;
- знаходить вершину параболу;
- інтерпретує розв'язки нерівностей у контексті задачі (час, висота, безпека);
- робить обґрунтовані висновки.

II. Ключові компетентності

✓ Математичне моделювання

• аналізує реальну ситуацію через математичну модель.

✓ Громадянська відповідальність: усвідомлює важливість безпечного використання технологій.

✓ Логічне мислення

• аргументує послідовність розв'язування;

• пояснює отримані результати.

Проблемне запитання:

«Чи може дрон втратити безпечну висоту навіть тоді, коли спочатку стрімко набирає висоту?»

У житті початкове зростання не завжди гарантує безпеку протягом усього процесу. Квадратична модель допомагає: визначати безпечні проміжки часу, прогнозувати зміну висоти, приймати обґрунтовані рішення.

Розв'язання:

1. Коли дрон перебуває на висоті не нижче 20 м?

Розв'язуємо нерівність: $-2t^2 + 16t \geq 20$

Переносимо: $-2t^2 + 16t - 20 \geq 0$

Ділимо на -2 (змінивши знак нерівності): $t^2 - 8t + 10 \leq 0$

Знаходимо дискримінант та корені:

$$D = 24, t_1 = 4 + \sqrt{6} \approx 6,45; t_2 = 4 - \sqrt{6} \approx 1,55.$$

Отже, дрон перебуває на висоті ≥ 20 м приблизно від 1,55с до 6,45 с.

2. Коли висота перевищує 24 м?

$$-2t^2 + 16t > 24$$

$$-2t^2 + 16t - 24 > 0$$

Ділимо на -2: $t^2 - 8t + 12 < 0, D = 16, t_1 = 2, t_2 = 6.$

Отже, висота перевищує 24 м при $2 < t < 6$.

3. Безпечний політ ($h(t) \geq 5$)

$$-2t^2 + 16t \geq 5$$

$$-2t^2 + 16t - 5 \geq 0$$

Ділимо на -2: $t^2 - 8t + 2,5 \leq 0,$

$$D = 54, t_1 = 4 + \frac{\sqrt{54}}{2} \approx 7,67; t_2 = 4 - \frac{\sqrt{54}}{2} \approx 0,33$$

Отже, безпечний політ триватиме приблизно від 0,33 с до 7,67 с.

4. Максимальна висота

$$t_0 = \frac{-16}{2(-2)} = 4$$

$$h(4) = -2(16) + 64 = 32$$

Отже, максимальна висота – 32 м, досягається через 4 с.

Орієнтовні критерії оцінювання

Рівень / Бали	МАО 1 Дослідження ситуації	МАО 2 Моделювання	МАО3 Оцінювання результату
Початковий / 1–3 бали	Розуміє умову нерівності частково; потребує допомоги; не виділяє, які значення змінної потрібно знайти	За зразком записує нерівності, не розуміючи правил переносу членів і зміни знака	Не оцінює корені або дає формальну відповідь без пояснення
Середній / 4–6 балів	За підказкою визначає, які члени треба перенести; встановлює зв'язок з квадратною функцією	Складає нерівність і обчислює дискримінант з допомогою; допускає незначні помилки у формулах	Дає короткий висновок про корені, але без пояснення інтервалів розв'язків
Достатній / 7–9 балів	Самостійно аналізує нерівність; формулює математичну проблему	Самостійно будує модель: обчислює дискримінант, знаходить корені, визначає інтервали розв'язків	Пояснює результат: правильно визначає інтервали, враховує знак нерівності, робить висновок про сенс задачі (час, висота, безпечний політ)
Високий / 10–12 балів	Глибоко аналізує умову; пропонує альтернативні підходи або перевірки	Творчо будує модель, оптимізує обчислення; враховує всі нюанси (наприклад, від'ємний коефіцієнт)	Аргументує рішення; оцінює доцільність і правильність розв'язку в контексті задачі; робить узагальнення

Можливі варіанти диференціації

1. Диференціація за рівнем складності

Початковий рівень

- Надати покроковий алгоритм розв'язання.
- Дозволити користування формулою дискримінанта.
- Дозволити використання калькулятора.
- Запропонувати побудувати графік для візуалізації.

Середній рівень

- Самостійно скласти нерівність.
- Пояснити фізичний зміст інтервалів.
- Порівняти аналітичний і графічний спосіб розв'язання.

Достатній рівень

- Самостійно дослідити зміну траєкторії при зміні коефіцієнтів.
- Знайти тривалість польоту (коли $h(t)=0$).
- Побудувати графік у GeoGebra.

Високий рівень

- Скласти власну модель польоту дрона.
- Дослідити, як вплине зміна коефіцієнта при t^2 на t^2 .

- Порівняти дві моделі польоту та зробити аналітичні висновки.
- Розв'язати задачу параметрично.

2. Диференціація за формою роботи: індивідуальна робота, робота в парах (один — обчислює, інший — інтерпретує), робота в групах (аналіз різних моделей польоту), міні-проект: «Як забезпечити безпечний політ дрона?».

3. Диференціація за способом подання: аналітичний спосіб, графічний спосіб, табличний аналіз, використання цифрових інструментів (GeoGebra, Desmos).

4. Формувальне оцінювання. Можна додатково оцінювати: уміння пояснювати, участь у дискусії, правильність математичної мови, охайність оформлення.

Міжпредметна інтеграція:

Фізика – застосування до руху тіл, висоти польоту, прискорення або швидкості; аналіз фізичних обмежень і безпечних параметрів.

Економіка – моделювання прибутку, витрат, оптимізація бізнес-рішень; оцінка ефективності та ресурсів.

Інформатика / STEM – побудова графіків, комп'ютерне моделювання процесів, автоматизація обчислень та візуалізація результатів.

Громадянська освіта – оцінка впливу рішень на міську інфраструктуру; розвиток відповідального підприємництва та соціальної відповідальності.

Фінансова грамотність – планування витрат і доходів, прийняття обґрунтованих рішень на основі отриманих даних.

Географія – аналіз просторових даних, територіальне планування, оцінка розташування об'єктів чи зон.

Соціологія – врахування впливу рішень на людей та громаду; дослідження соціальних наслідків.

Екологія – оцінка впливу економічних або технічних рішень на навколишнє середовище; планування сталого розвитку.

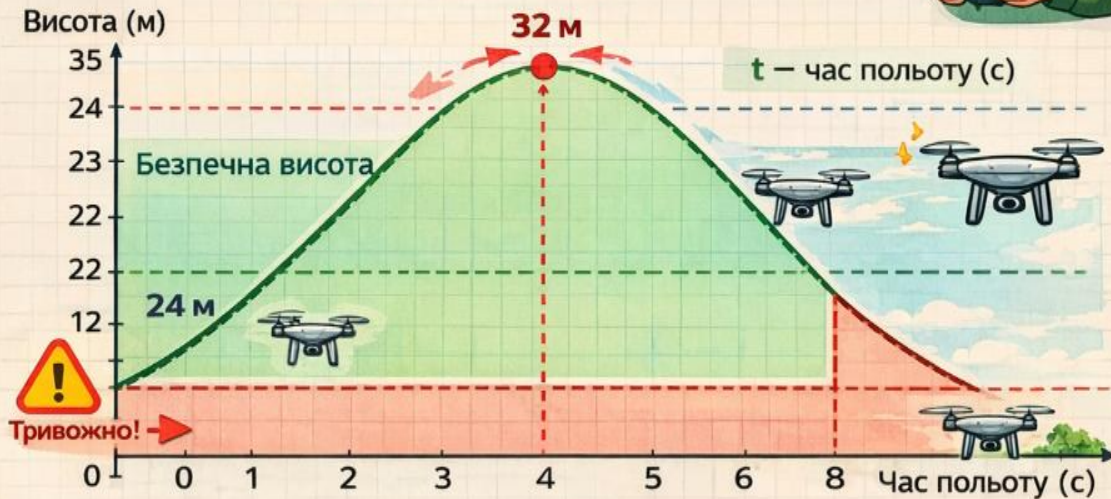


МОДЕЛЮВАННЯ ТРАЄКТОРІЇ ПОЛЬОТУ БЕЗПІЛОТНИКА



Курсанти моделюють траєкторію польоту:

$$h(t) = -2t^2 + 16t$$



1. На висоті не нижче 20 м 3
[3;7]

2. Вище 24 м [3,6]

3. Безпечний політ [0;8]
✓ Визначте проміжок часу ≥ 5 м

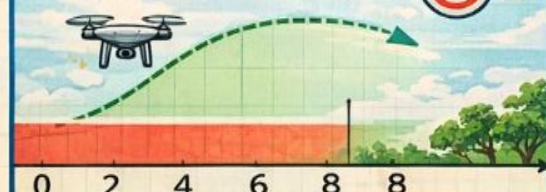
4. Максимальна висота 32 м @ 4 с



Дослідницьке питання:

Через вітер: $h(t) = -2t^2 + 12t$

- 1 Чи зміниться максимальна висота?
- 2 Як зміниться час безпечного польоту?



$$h(t) = -2t^2 + 12t$$



Дослідницьке питання:

Через вітер: $h(t) = -2t^2 + 12t$

- 1 Чи зміниться максимальна висота?
- 2 Як зміниться час безпечного польоту?



1.3.3. Проєкт «Кіберщит серверу»

Авторка: *Бедусенко Ольга Сергіївна, вчитель математики
Леськівського ліцею з початковою школою та гімназією
Леськівської сільської ради Черкаського району
Черкаської області*

Під час моделювання системи кіберзахисту серверу виявлено, що рівень захищеності системи залежить від часу після запуску захисного протоколу.

Рівень захисту описується функцією:



$$S(t) = -4t^2 + 24t - 20$$

де

t — час у секундах
після запуску протоколу,

$S(t)$ — рівень
захищеності (умовні
одиниці).

Система вважається:

стабільною, якщо

$$S(t) \geq 10;$$

критично

перевантаженою, якщо $S(t) > 16$;

небезпечною, якщо $S(t) \leq 0$.

Завдання

1. Визначте проміжок часу, коли система працює стабільно (тобто $S(t) \geq 10$).

2. Знайдіть, коли система перебуває в стані критичного перевантаження (тобто $S(t) > 16$).

3. Визначте моменти часу, коли рівень захисту дорівнює нулю. Що це означає для роботи серверу?

4. Знайдіть максимальний рівень захисту та момент часу, коли його досягнуто.

5. (Аналітичне мислення)

Адміністратор оновив систему, і функція стала: $S(t) = -4t^2 + 24t - 20$

Не виконуючи повного розв'язання, поясніть:

- чи збільшиться максимальний рівень захисту;
- чи збільшиться час стабільної роботи.

Очікувані результати навчання

I. Предметні результати (математична компетентність)

Після виконання завдання учень / учениця:

- Розпізнає квадратну функцію та визначає її коефіцієнти.
- Розв'язує квадратні нерівності різних видів ($\geq$, $>$, $\leq$).

- Використовує дискримінант для знаходження коренів квадратного рівняння.
- Застосовує метод інтервалів для визначення проміжків розв'язків.
- Знаходить вершину параболи та визначає максимальне значення функції.
- Інтерпретує розв'язки в контексті реальної ситуації (стабільність системи, перевантаження, небезпека).
- Робить обґрунтовані висновки щодо зміни коефіцієнтів функції.

II. Результати в контексті НУШ (ключові компетентності)

- ✓ Математичне моделювання
 - аналізує реальну ситуацію через математичну модель;
 - встановлює зв'язок між формулою та практичним змістом.
- ✓ Інформаційно-цифрова компетентність
 - розуміє базові принципи роботи захисних цифрових систем;
 - може дослідити модель за допомогою графічних інструментів: GeoGebra, Desmos.
- ✓ Критичне та логічне мислення
 - аргументує правильність розв'язку;
 - пояснює вплив зміни коефіцієнтів на поведінку функції.
- ✓ Громадянська та безпекова компетентність
 - усвідомлює важливість кібербезпеки;
 - розуміє необхідність стабільної роботи цифрових систем.

III. Наскрізні вміння

Учень / учениця:

- ✓ працює з математичними символами та записами;
- ✓ дотримується логічної послідовності;
- ✓ аналізує отриманий результат;
- ✓ формулює висновки повними реченнями;
- ✓ співпрацює в парній або груповій роботі (за потреби).

Очікуваний підсумковий результат уроку

Учні повинні вміти:

- ✓ самостійно розв'язувати квадратні нерівності;
- ✓ визначати проміжки стабільної роботи системи;
- ✓ знаходити максимальне значення квадратичної функції;
- ✓ пояснювати результати з практичної точки зору.

Проблемне запитання:

«Чи може сервер втратити безпеку навіть тоді, коли рівень захисту спочатку швидко зростає?»

У реальному житті початкове посилення захисту не завжди гарантує стабільну роботу системи впродовж усього часу.

Квадратична модель допомагає:

- ✓ визначати безпечні проміжки роботи системи,
- ✓ прогнозувати моменти перевантаження або збою,

✓ приймати обґрунтовані рішення щодо оптимального часу роботи протоколу.

Розв'язання:

1. Коли система працює стабільно?

$$(S(t) \geq 10)$$

Розв'язуємо нерівність: $-4t^2 + 24t - 20 \geq 10$

Переносимо 10: $-4t^2 + 24t - 30 \geq 0$

Ділимо на -2: $2t^2 - 12t + 15 \leq 0$

Знаходимо дискримінант та корені: $D = 24$, $t_1 \approx 1,78$, $t_2 \approx 4,22$

Отже, стабільна робота системи: $1,78 \leq t \leq 4,22$.

2. Коли система перевантажена?

$$(S(t) > 16)$$

$$-4t^2 + 24t - 20 > 16$$

$$-4t^2 + 24t - 36 > 0$$

Ділимо на -4: $t^2 - 6t + 9 < 0$

$$(t - 3)^2 < 0$$

Квадрат числа не може бути меншим за нуль. Розв'язків немає.

Отже, система ніколи не перевищує рівень 16.

3. Коли рівень захисту дорівнює нулю?

Розв'язуємо рівняння: $-4t^2 + 24t - 20 = 0$

Ділимо на -4: $t^2 - 6t + 5 = 0$, $D = 16$, $t_1 = 1$, $t_2 = 5$.

Отже, захист дорівнює нулю в моменти: $t_1 = 1$, $t_2 = 5$.

4. Максимальний рівень захисту

Знаходимо вершину параболи: $t_0 = \frac{-24}{2(-4)} = 3$

Знаходимо значення функції: $S(3) = -36 + 72 - 20 = 16$

Отже, максимальний рівень захисту – 16 годин досягається через 3 секунди після запуску.

Орієнтовні критерії оцінювання

Рівень / Бали	МАО1 Дослідження ситуації	МАО2 Моделювання	МАО3 Оцінювання результату
Початковий / 1–3 бали	Частково розуміє умову задачі; не розрізняє стани системи (стабільна, перевантажена, небезпечна); потребує допомоги	За зразком підставляє значення у функцію; не розуміє, як утворюються нерівності	Дає відповідь без пояснення або неправильно інтерпретує результат
Середній / 4–6 балів	З підказкою визначає, які нерівності відповідають умовам задачі; частково розуміє залежність $S(t)$ від t	Складає квадратні нерівності та рівняння з допомогою; допускає помилки в обчисленнях або знаках	Формулює короткі відповіді (часові проміжки), але без повного пояснення їх змісту для роботи системи

Достатній / 7–9 балів	Самостійно аналізує умову; правильно встановлює зв'язок між функцією та станами системи	Самостійно розв'язує квадратні нерівності й рівняння; знаходить корені, визначає проміжки часу	Пояснює отримані результати: визначає періоди стабільності, перевантаження, небезпеки; інтерпретує їх у контексті роботи серверу
Високий / 10–12 балів	Глибоко аналізує задачу; робить узагальнення про поведінку системи захисту	Раціонально будує модель; використовує різні способи (вершина параболі, аналіз графіка); враховує всі особливості функції	Аргументовано оцінює результати; пояснює практичне значення (оптимальний час роботи, ризики); робить висновки та пропонує покращення системи

Можливі варіанти диференціації

1. Диференціація за рівнем складності навчальних завдань

Початковий рівень

- Надати покроковий алгоритм розв'язування квадратної нерівності.
- Дозволити користування формулами дискримінанта та коренів.
- Запропонувати знайти лише корені рівняння без визначення інтервалів.
- Дозволити побудову графіка для візуального визначення розв'язків.
- Обмежити завдання одним типом нерівності (наприклад, лише $\geq$).

Середній рівень

- Самостійно скласти нерівності за текстом задачі.
- Знайти інтервали розв'язків методом інтервалів.
- Пояснити фізичний зміст одного з отриманих проміжків.
- Порівняти аналітичний і графічний способи розв'язання.

Достатній рівень

- Виконати повне розв'язання всіх завдань без підказок.
- Дослідити зміну інтервалів при зміні коефіцієнтів.
- Побудувати графік у GeoGebra або Desmos.
- Пояснити, як зміниться максимальне значення функції при зміні коефіцієнта a .

Високий рівень

- Самостійно змодельовати нову функцію кіберзахисту.
- Розв'язати задачу з параметром.
- Дослідити, за яких умов система працюватиме стабільно найдовше.
- Порівняти дві моделі та зробити аналітичні висновки.

- Пояснити вплив кожного коефіцієнта на графік функції.

2. Диференціація за формою організації роботи

- Індивідуальна робота — розв'язання базових завдань.
- Робота в парах — один учень виконує обчислення, інший пояснює інтерпретацію.
- Групова робота — аналіз різних моделей захисту.
- Міні-проект — створення власної математичної моделі кіберзахисту.

3. Диференціація за способом подання матеріалу: аналітичний спосіб (через дискримінант); графічний спосіб (побудова параболи); табличний аналіз значень функції; використання цифрових інструментів.

4. Диференціація за очікуваним результатом

Обов'язковий мінімум: розв'язати квадратні нерівності; знайти інтервали розв'язків.

Поглиблений результат: дослідити зміну коефіцієнтів; зробити аналітичні висновки; створити власну модель.

Міжпредметна інтеграція:

Інформатика / STEM – моделювання рівня захисту серверу за допомогою функції; побудова графіків; аналіз роботи алгоритмів кіберзахисту; автоматизація обчислень і прогнозування станів системи.

Кібербезпека – оцінка стійкості серверу до перевантажень і збоїв; визначення безпечних проміжків роботи; аналіз ризиків втрати захисту.

Математика – використання квадратних функцій і нерівностей для опису процесів; знаходження максимуму, коренів і проміжків; аналітичне дослідження моделі.

Фізика (аналогія процесів) – інтерпретація функції як процесу зростання і спаду (подібно до руху чи енергії); аналіз пікових значень і критичних точок.

Економіка – оцінка ефективності роботи серверу; визначення оптимального часу функціонування для зменшення втрат і ризиків.

Громадянська освіта – розуміння важливості захисту інформації; формування відповідального ставлення до цифрової безпеки.

Фінансова грамотність – аналіз витрат на підтримку стабільної роботи серверу та уникнення перевантажень чи збоїв.

Соціологія – врахування впливу збоїв серверу на користувачів і суспільство; оцінка наслідків втрати даних або доступу.

Екологія (цифрова) – оптимізація роботи серверів для зменшення енергоспоживання; раціональне використання ресурсів дата-центрів.

КІБЕРЩИТ СЕРВЕРУ

Чи може сервер втратити безпеку навіть тоді,
коли рівень захисту спочатку швидко зростає?

Графік рівня захисту: $S(t) = -4t^2 + 24t - 20$



❗ Небезпечно $S(t) \leq 0$

✓ Стабільно $S(t) \geq 10$

⚠ Критично $S(t) > 16$

Питання:



Коли сервер працює стабільно?



Коли починається критичне перевантаження?



В який момент рівень захисту стане нульовим?

1.4. Системи рівнянь: точка перетину ідей

1.4.1. Розробка прототипу серії «Alpha-9»

Авторка: *Гонза Валерія Євгенівна, вчитель математики Черкаської гімназії №9 ім. О. М. Луценка Черкаської міської ради Черкаської області*

Український стартап у сфері електроніки працює над створенням ергономічного смартфона для людей, які багато працюють із текстами та графіками. Головний дизайнер наполягає на тому, що смартфон має ідеально лягати в долоню, тому ширина корпусу обмежена. Крім того, компанія використовує дорогі OLED-панелі, вартість яких напряму залежить від їхньої площі: кожен квадратний сантиметр панелі коштує 120 грн.



Технічні дані (специфікація):

- Матеріал корпусу: авіаційний алюміній та загартоване скло.
- Акумулятор: 5000 мА·год (товщина батареї — 4 мм).
- Геометрія екрана: сума довжини (x) та ширини (y) видимого дисплея має становити рівно 17,5 см.
- Енергоефективність: для стабільної роботи підсвітки протягом 24 годин площа

дисплея повинна бути 75 см².

• Бюджет на дисплей: відділ закупівель виділив не більше 9500 грн на одну одиницю товару.

Завдання:

1. Математична модель: складіть систему рівнянь, що описує геометричні параметри екрана (x та y).
2. Розрахунок габаритів: обчисліть довжину та ширину екрана у сантиметрах.
3. Економічна експертиза: використовуючи дані про вартість квадратного сантиметра OLED-панелі, перевірте, чи вписується розроблений екран у встановлений бюджет (9500 грн).
4. Маркетингове дослідження: обчисліть діагональ екрана (см) та визначте співвідношення сторін. Дослідіть сучасні тренди на співвідношення сторін та визначте чи можна назвати цей смартфон «трендовим»?

Методичні рекомендації для вчителя

I. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

- учень/учениця формує математичну модель технічних параметрів смартфона у вигляді системи рівнянь другого степеня (лінійне рівняння для суми сторін та рівняння другого степеня для площі);
- застосовує алгоритм методу підстановки для розв'язання складеної системи та знаходження лінійних розмірів дисплея;
- використовує теорему Піфагора для обчислення довжини діагоналі екрана за знайденими сторонами;
- здійснює селекцію інформації, ідентифікуючи та відсіюючи надлишкові дані (параметри акумулятора та матеріалу корпусу), що не впливають на розв'язок;
- усвідомлює роль математичного моделювання у прийнятті управлінських рішень у сфері високих технологій, дизайну та економіки.

Предметна компетентність (математична):

- **пояснює зміст** математичної моделі як системи рівнянь, де лінійне рівняння описує ергономічне обмеження (суму сторін корпусу), а рівняння другого степеня — технологічну вимогу до площі OLED-панелі;
- **знає та застосовує** алгоритм розв'язування систем рівнянь другого степеня методом підстановки для знаходження невідомих габаритів пристрою;
- **інтерпретує** знайдені розв'язки (x ; y) як реальні фізичні параметри (довжину та ширину дисплея), враховуючи змістовні обмеження (додатність чисел);
- **моделює** реальні інженерні та маркетингові ситуації (дизайн гаджетів, розрахунок собівартості компонентів) за допомогою апарату систем рівнянь;
- **виконує обчислення**, пов'язані з використанням теореми Піфагора для визначення довжини діагоналі екрана та розрахунку вартості матеріалів на основі площі;
- **аналізує** числові характеристики сторін для визначення коефіцієнта співвідношення (x ; y) та порівняння його з ринковими стандартами.

II. Ключові компетентності:

1. Інформаційно-комунікативна компетентність (ІКТ):

- **усвідомлює** взаємозв'язок між геометричними параметрами (співвідношення сторін 4:3, 16:9, 21:9) та функціональним призначенням сучасних цифрових пристроїв.

2. Підприємливість та фінансова грамотність:

- **прогнозує** витрати на виробництво OLED-панелі на основі обчисленої площі та зіставляє їх із лімітом бюджету компанії.

3. Уміння вчитися продовж життя:

- **демонструє** здатність до селекції та критичного оцінювання інформації, виокремлюючи необхідні математичні дані серед надлишкових технічних характеристик (ємність акумулятора, матеріал корпусу).

4. Вільне володіння державною мовою:

- **грамотно** формулює висновки за результатами дослідження, використовуючи відповідну технічну та математичну термінологію.

5. Навчання впродовж життя:

- **самостійно аналізує** відповідність отриманого результату сучасним ринковим трендам, формуючи критичне ставлення до технологічних стандартів.

III. Наскрізнi вміння:

- **читання з розумінням:** виокремлює ключові математичні умови (периметр, площа) з розлогого технічного опису та розрізняє головну інформацію від другорядної (характеристики акумулятора);

- **критичне та системне мислення:** аналізує отримане співвідношення сторін 4:3 та робить аргументований висновок щодо відповідності пристрою сучасним ринковим стандартам («трендовості»);

- **здатність логічно обґрунтовувати позицію:** формулює чітку відповідь щодо економічної доцільності виробництва, спираючись на порівняння обчисленої вартості дисплея з лімітом бюджету;

- **вміння конструктивно керувати емоціями:** зберігає концентрацію під час роботи з багатокомпонентною задачею та обчисленнями з десятковими дробами;

- **прийняття рішень:** обирає оптимальний шлях розв'язання системи рівнянь (метод підстановки) та визначає, які фізичні параметри об'єкта (x чи y) відповідають логіці реального пристрою.

Повне розв'язання

Крок 1. Аналіз умови та вибір змінних

Визначимо основні параметри екрана, які нам потрібно знайти. Нехай x — довжина екрана (см), а y — ширина екрана (см). З тексту задачі виділяємо математично значущі дані:

сума довжини та ширини: $x + y = 17,5$

площа дисплея: $x \cdot y = 75$

Надлишкові дані (ігноруємо на цьому етапі): ємність акумулятора (5000 мА·год), товщина (4 мм), матеріал (алюміній).

Крок 2. Складання та розв'язання системи рівнянь.

Записуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 17,5 \\ x \cdot y = 75 \end{cases}$$

Використовуємо метод підстановки. Виразимо y через x із першого рівняння:

$$y = 17,5 - x$$

Підставимо отриманий вираз у друге рівняння:

$$x(17,5 - x) = 75$$

$$17,5x - x^2 = 75$$

$$x^2 - 17,5x + 75 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$2x^2 - 35x + 150 = 0$$

$$D = (-35)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 150 = 1225 - 1200 = 25$$

Обчислимо корені:

$$x_1 = \frac{35 + 5}{4} = 10, \quad x_2 = \frac{35 - 5}{4} = 7,5$$

Якщо $x = 10$, то $y = 17,5 - 10 = 7,5$.

Якщо $x = 7,5$, то $y = 17,5 - 7,5 = 10$.

Оскільки на початку задачі x позначав довжину, то за його числове значення будемо приймати 10.

Отже, розміри екрана становлять 10 см (довжина) та 7,5 см (ширина)

Крок 3. Економічна експертиза.

Перевіряємо, чи вписується вартість екрана в бюджет (9500 грн).

Площа екрану 75 см^2 , вартість $1 \text{ см}^2 = 120$ грн, тому загальна вартість:
 $75 \cdot 120 = 9000$

Висновок: екран відповідає бюджетним обмеженням.

Крок 4. Маркетингове дослідження (діагональ та «трендовість»).

Обчислимо довжину діагоналі за теоремою Піфагора:

$$d = \sqrt{7,5^2 + 10^2} = \sqrt{56,25 + 100} = \sqrt{156,25} = 12,5 \text{ см}$$

Знайдемо співвідношення сторін:

$$\frac{x}{y} = \frac{10}{7,5} = \frac{100}{75} = \frac{4}{3}$$

Співвідношення становить 4:3.

Аналіз трендів: сучасний стандарт «витягнутих» екранів починається від 2:1 (або 18:9). Співвідношення 4:3 (що дорівнює приблизно 1,33:1) є набагато меншим.

Висновок: смартфон не є «трендовим» у розумінні сучасної моди на вузькі екрани; він має класичну «широку» форму.

Орієнтовні критерії оцінювання

<i>Рівень</i>	<i>Бали</i>	<i>[МАО 1] Дослідження та виокремлення проблем</i>	<i>[МАО 2] Моделювання та розроблення стратегій</i>	<i>[МАО 3] Критичне оцінювання результату</i>
Початковий	1 – 3	Розпізнає об'єкт (смартфон), але не може виділити математичні параметри.	Називає окремі компоненти (периметр, площа), але не може скласти рівняння.	Не може інтерпретувати отримані числа або надати висновок.
Середній	4 – 6	Бачить зв'язок між даними, але не може самостійно відсіяти зайву інформацію.	Складає систему рівнянь, проте припускається помилок у методі підстановки або обчисленнях.	Робить спробу порівняння з бюджетом, але висновок неповний або помилковий.
Достатній	7 – 9	Вірно ідентифікує всі необхідні дані та розуміє, які цифри є	Правильно складає модель, знаходить габарити та діагональ,	Обґрунтовує відповідність бюджету та правильно обчислює

		надлишковими для розв'язку.	припускаючись лише дрібних неточностей.	співвідношення сторін.
Високий	10 – 12	Здійснює швидкий та точний аналіз специфікації, чітко розмежовуючи математичну та технічну інформацію.	Обирає раціональний спосіб розв'язання, демонструє вільне володіння алгоритмами та теоремою Піфагора.	Формулює глибокий висновок щодо ринкової «трендовості», базуючись на точному аналізі співвідношення.

Можливі варіанти диференціації

Для учнів, які потребують підтримки: вилучити з тексту всі надлишкові дані; змінити інформацію про суму сторін на периметр; надати макет системи рівнянь для заповнення.

Базовий рівень: стандартне розв'язання даної задачі з усіма початковими умовами та завданнями.

Для сильних учнів: запропонувати учням дослідити, якими стануть розміри сторін смартфона, якщо компанія вирішить зробити його «трендовими» зберігаючи площу екрану початковою; обчислити відсоток «економії» бюджету (різниця між закладеною вартістю екрану та обрахованою).

1.4.2. Проектування системи автополиву «Smart Garden»

Авторка: *Гонза Валерія Євгенівна, вчитель математики Черкаської гімназії №9 ім. О. М. Луценка Черкаської міської ради Черкаської області*

Ландшафтний дизайнер проектує зрошувальну систему для прямокутної ділянки. У центрі ділянки (точка $O(0;0)$) встановлено роторний



зрошувач моделі Hunter I-20 з витратою води 15 літрів за хвилину, який поливає круглу зону. Робочий тиск у системі становить 3,5 бару, що забезпечує радіус поливу 5 метрів. Межа зони зволоження описується рівнянням: $x^2 + y^2 = 25$ (де 1 одиниця = 1 метр).

Через цю ділянку по прямій прокладено декоративну доріжку. Вона проходить через точки $A(0; 5)$ та $B(5; 0)$. Через ділянку прокладено пішохідну доріжку завширшки 1,2 метра, викладену гранітною бруківкою. Дизайнер визначив, що рівняння лінії краю доріжки: $x + y = 5$. Вартість 1 метра погонного захисного бордюру становить 450 грн, а загальний бюджет проекту — 15 000 грн.

Дизайнеру потрібно знайти точки, де доріжка перетинає межу зони поливу, щоб встановити там спеціальні форсунки, які не забризкуватимуть перехожих.

Завдання

1. Математична модель: запишіть систему рівнянь, що описує взаємозв'язок між зоною поливу та краєм доріжки.
2. Аналітичне розв'язання: знайдіть координати точок перетину (M і N), розв'язавши систему.
3. Геометрична інтерпретація: побудуйте схему ділянки в зошиті. Позначте зону поливу та лінію доріжки.
4. Прикладний розрахунок: обчисліть довжину ділянки доріжки (хорди), яка проходить безпосередньо всередині зони поливу (тобто мокне під час роботи ротора).

Методичні рекомендації для вчителя

I. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

- учень/учениці **формує** математичну модель прикладної задачі у вигляді системи рівнянь другого степеня;
- **застосовує** алгоритм методу підстановки;
- **обчислює** відстань між двома точками за їхніми координатами;

- **усвідомлює** важливість точних розрахунків у професійній діяльності (дизайн, інженерія).

Предметна компетентність (математична):

- **пояснює** зміст математичної моделі як системи рівнянь, де одне рівняння описує межу кола (зону поливу), а інше — лінійний об'єкт (доріжку);

- **знає та застосовує** алгоритм розв'язування систем рівнянь другого степеня (метод підстановки);

- **знаходить** координати точок перетину (x ; y) та інтерпретує їх як реальні об'єкти на плані ділянки;

- **моделює** реальні ситуації (дизайн саду, інженерні мережі) за допомогою систем рівнянь;

- **виконує** обчислення, пов'язані з розрахунком відстані між двома точками на площині для визначення довжини об'єкта.

II. Ключові компетентності:

1. Компетентність у природничих науках і технологіях (екологічна грамотність):

- **усвідомлює** важливість точного розрахунку зони поливу для раціонального використання водних ресурсів та запобігання надмірному зволоженню пішохідних зон.

2. Інформаційно-комунікаційна компетентність (ІКТ):

- **опрацьовує** дані задачі, виокремлюючи ключові параметри (радіус, координати) та відкидаючи другорядні характеристики (матеріал доріжки чи тип рослин);

- **використовує** графічні калькулятори (Desmos, GeoGebra) для візуалізації системи та перевірки отриманих точок перетину.

3. Уміння навчатися впродовж життя:

- **класифікує** типи ліній (коло, пряма) та вибирає оптимальний метод розв'язання системи залежно від структури рівнянь.

III. Наскрізні вміння

- **читання з розумінням:** здатність точно інтерпретувати текстовий опис («центр у точці О», «проходить через точки») і перекладати його на мову алгебраїчних знаків;

- **логічне обґрунтування:** здатність чітко формулювати послідовність кроків: від складання системи рівнянь до перевірки того, чи лежать знайдені точки на обох лініях;

- **розв'язування проблем:** здатність перетворити технічне завдання ландшафтного дизайну на математичну задачу, знайти розв'язок і зробити прикладний висновок (наприклад, довжина зони ризику на доріжці становить $\approx 7,07$ м).

Повне розв'язання

Крок 1. Формування системи.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Крок 2. Метод підстановки.

З другого рівняння: $y = 5 - x$

Підставляємо в перше: $x^2 + (5 - x)^2 = 25$

$$x^2 + 25 - 10x + x^2 = 25$$

$$2x^2 - 10x = 0$$

$$2x(x - 5) = 0$$

Отже, $x_1 = 0, x_2 = 5$.

Крок 3. Координати точок.

Якщо $x_1 = 0$, то $y_1 = 5 - 0 = 5$. Отримуємо точку $M(0; 5)$.

Якщо $x_2 = 5$, то $y_2 = 5 - 5 = 0$. Отримуємо точку $N(5; 0)$.

Крок 4. Довжина «мокрої» ділянки.

Використовуємо формулу відстані:

$$d = \sqrt{(5 - 0)^2 + (0 - 5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07 \text{ м}$$



Орієнтовні критерії оцінювання

<i>Рівень</i>	<i>Бали</i>	<i>[МАО 1] Дослідження та виокремлення проблем</i>	<i>[МАО 2] Моделювання та розроблення стратегій</i>	<i>[МАО 3] Критичне оцінювання результату</i>
Початковий	1 – 3	Розпізнає в умові математичні об'єкти (коло, пряма), але не може відокремити суттєві дані від надлишкових.	Записує окремі рівняння або фрагменти формул без створення цілісної системи.	Потребує постійної допомоги для інтерпретації того, що означають знайдені числа.
Середній	4 – 6	Виокремлює основні дані, але може помилково включити частину надлишкових (наприклад, тиск або бюджет) у розрахунки.	Складає систему рівнянь. Розпочинає розв'язання методом підстановки, але припускається помилок у перетвореннях чи обчисленнях.	Робить спробу пояснити значення точок перетину, але не може розрахувати довжину "микрої" ділянки.
Достатній	7 – 9	Чітко ідентифікує необхідні дані та ігнорує надлишкові. Розуміє сутність проблеми перетину траєкторій.	Правильно розв'язує систему рівнянь аналітичним методом. Знаходить координати точок.	Перевіряє отриманий результат підстановкою. Правильно обчислює відстань (довжину хорди), використовуючи формулу.
Високий	10 – 12	Аналізує ситуацію комплексно. Обґрунтовує, чому певні дані (модель, ціна) не впливають на геометричну модель.	Обирає найефективнішу стратегію розв'язання. Співвідносить аналітичний розв'язок із графічною ілюстрацією (проектом).	Аргументує прикладне значення результату: оцінює площу/довжину зони ризику. Пропонує варіанти оптимізації (зміна радіуса чи положення доріжки).

Можливі варіанти диференціації

Для учнів, які потребують підтримки: картка-підказка з нагадуванням формули скороченого множення $(a - b)^2$ та алгоритмом методу підстановки.

Базовий рівень: додати умову: «Доріжку змістили паралельно саму собі так, що її рівняння стало $x + y = 10$. Чи буде вона тепер перетинати зону поливу? Обґрунтуйте без побудови (через дискримінант)».

Для сильних учнів: запропонувати учням змінити радіус поливу так, щоб доріжка стала дотичною до кола (дослідження кількості розв'язків системи).

1.4.3. Річкова логістика: подорож Дніпром

Авторка: *Гонза Валерія Євгенівна, вчитель математики Черкаської гімназії №9 ім. О. М. Луценка Черкаської міської ради Черкаської області*

Група туристів планує подорож на моторному човні річкою Дніпро від причалу міста Канів до бази відпочинку, що розташована вище за течією.



Навесні швидкість течії річки є вищою, ніж улітку, що суттєво впливає на витрати пального та час у дорозі. Туристи мають у розпорядженні човен, власна швидкість якого (швидкість у стоячій воді) становить 25 км/год. Згідно з технічним паспортом, паливний бак човна розрахований на 60 літрів, а витрата пального

становить приблизно 0,4 л на кожний кілометр шляху (незалежно від швидкості відносно берега). У день подорожі температура повітря становить $+18^{\circ}\text{C}$, а вітер — північно-західний, 3 м/с. Відомо, що шлях до бази відпочинку проти течії зайняв у групи 3 години, а зворотний шлях (за течією) — на 36 хвилин менше.

Завдання

1. Математичне моделювання: визначте швидкість течії річки (x) та відстань від Канева до бази відпочинку (y). Складіть систему рівнянь, що описує цей рух.
2. Обчислення: розв'яжіть отриману систему рівнянь зручним для вас способом (підстановки або додавання).
3. Критичний аналіз даних: які дані в тексті задачі є надлишковими (зайвими) для знаходження швидкості течії та відстані? Чому?
4. Прикладне рішення (логістика): обчисліть, чи вистачить туристам повного бака пального для подорожі «туди і назад», враховуючи знайдену відстань.

Методичні рекомендації для вчителя

І. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

- учень/учениця **формує** математичну модель прикладної задачі у вигляді системи двох лінійних рівнянь з двома змінними (або системи, що зводиться до лінійної);
- **застосовує** алгоритм методу підстановки або методу додавання для розв'язання систем;
- **інтерпретує** отримані результати (швидкість течії та відстань) у контексті реальної ситуації;

- **усвідомлює** важливість точних розрахунків для безпеки та економічної ефективності (розрахунок пального, планування часу).

Предметна компетентність (математична):

- **пояснює** зміст моделі: як швидкість течії впливає на загальну швидкість об'єкта;
- **складає** систему рівнянь, де кожне рівняння описує шлях в одному з напрямків (за течією / проти течії);
- **знаходить** значення змінних та розуміє їх фізичний зміст;
- **моделює** логістичну операцію: розраховує потребу в ресурсах (пальне) на основі знайденої відстані.

II. Ключові компетентності

1. Компетентність у природничих науках і технологіях:

- розуміє фізичні закони додавання швидкостей;
- аналізує вплив зовнішніх факторів (швидкість течії) на енерговитрати (споживання пального).

2. Інформаційно-комунікаційна компетентність (ІКТ):

- **опрацьовує** дані: відокремлює ключові параметри (час, власна швидкість) від другорядних (температура повітря, вітер, назва міста);
- може використовувати цифрові інструменти (електронні таблиці) для швидкого перерахунку витрат пального при зміні відстані.

3. Екологічна та фінансова грамотність:

- розраховує оптимальну кількість пального, уникаючи зайвих витрат або небезпечних ситуацій (зупинка посеред річки через порожній бак).

III. Наскрізні вміння

- **читання з розумінням:** виокремлення математичних значень із художнього тексту про подорож. Здатність розрізнити одиниці вимірювання (хвилини перевести в години).

- **логічне обґрунтування:** пояснення, чому час руху в один бік більший за інший, та як це пов'язано зі знаком (+ або -) перед швидкістю течії в рівнянні.

- **розв'язування проблем:** здатність діяти в умовах надлишкових даних та приймати рішення ("Вистачить пального чи ні?").

IV. Робота з надлишковими даними та пошуком

У цій задачі вчителю варто звернути увагу учнів на такі моменти:

- **надлишковість:** температура $+18^{\circ}$ та північно-західний вітер введені для того, щоб навчити учня фокусуватися на головному. У реальному житті інформації завжди більше, ніж потрібно для розрахунку.

- **самостійний пошук:** учень має самостійно згадати, що для знаходження витрати пального потрібно помножити загальний шлях на коефіцієнт споживання (0,4 л/км).

- критична деталь: переведення 36 хвилин у десятковий дріб (0,6 години) є критичним етапом, де учні часто припускаються помилок (записують як 0,36).

Повне розв'язання

Крок 1. Аналіз даних та математичне моделювання.

Перш за все, приведемо всі одиниці вимірювання до єдиної системи (години та км/год).

- Власна швидкість човна: $v_{\text{вл}} = 25$ км/год.
- Час проти течії: $t_1 = 3$ год.
- Час за течією: $t_2 = 3$ год – 36 хв.

Оскільки $36 \text{ хв} = \frac{36}{60} \text{ год} = 0,6 \text{ год}$, то $t_2 = 3 - 0,6 = 2,4$ год.

- Нехай x — швидкість течії річки (км/год), а y — відстань від Канева до бази відпочинку (км).

- Швидкість човна проти течії: $(25 - x)$ км/год.
- Швидкість човна за течією: $(25 + x)$ км/год.
- Враховуючи формулу відстані $s = v \cdot t$, маємо систему:

$$\begin{cases} y = 3(25 - x) \\ y = 2,4(25 + x) \end{cases}$$

Крок 2. Розв'язування системи рівнянь.

Скористаємося методом прирівнювання (оскільки обидва вирази дорівнюють y):

$$\begin{aligned} 3(25 - x) &= 2,4(25 + x) \\ 75 - 3x &= 60 + 2,4x \\ -3x - 2,4x &= 60 - 75 \\ -5,4x &= -15 \\ x &= -\frac{15}{-5,4} = \frac{150}{54} = \frac{25}{9} \approx 2,78 \text{ (км/год)} \end{aligned}$$

Крок 3. Знайдемо відстань y , підставивши x у перше рівняння:

$$y = 3\left(25 - \frac{25}{9}\right) = 3\left(\frac{225 - 25}{9}\right) = 3 \cdot \frac{200}{9} = \frac{200}{3} \approx 66,67 \text{ (км)}$$

Відповідь: швидкість течії $\approx 2,8$ км/год; відстань до бази $\approx 66,7$ км/год.

Відповіді на логічні запитання:

- **Надлишкові дані:** температура повітря ($+18^\circ\text{C}$) та швидкість вітру (3м/с) не впливають на математичну модель руху човна в межах цієї задачі.

- **Пальне:** загальна відстань $= 66,7 \cdot 2 = 133,4$ км. Потрібно пального: $133,4 \cdot 0,4 = 53,36$ л. Оскільки $53,36 < 60$, пального вистачить.

Орієнтовні критерії оцінювання

<i>Рівень</i>	<i>Бали</i>	<i>[МАО 1] Дослідження та виокремлення проблем</i>	<i>[МАО 2] Моделювання та розроблення стратегій</i>	<i>[МАО 3] Критичне оцінювання результату</i>
Початковий	1 – 3	Розпізнає в тексті числа, але не може виділити математичні взаємозв'язки.	Намагається записати окремі формули, але не може скласти цілісну систему.	Виконує лише елементарні дії (наприклад, додавання чисел), не розуміючи контексту.
Середній	4 – 6	Виокремлює основні дані, проте плутається в одиницях вимірювання (наприклад, не переводить 36 хв у 0,6 год).	Складає систему рівнянь з помилками або розв'язує її лише частково з допомогою вчителя.	Отримує числову відповідь, але не може пояснити її фізичний зміст (швидкість, відстань).
Достатній	7 – 9	Самостійно виокремлює параметри руху, правильно переводить одиниці часу. Відкидає частину зайвих даних.	Складає правильну систему рівнянь. Розв'язує її методом підстановки/додавання з незначними помилками.	Коректно порівнює об'єм пального в баку з розрахованою потребою. Робить висновок: "вистачить/не вистачить".
Високий	10 – 12	Аналізує всі дані, чітко ідентифікує всі надлишкові параметри (вітер, температура). Обґрунтовує вибір змінних.	Створює бездоганну математичну модель. Демонструє раціональний спосіб розв'язання системи.	Критично оцінює реалістичність швидкості течії. Пропонує варіанти дій, якщо умови зміняться (наприклад, зміна витрати пального).

Можливі варіанти диференціації

Для учнів, які потребують підтримки: замість 36 хвилин одразу вказати час у десяткових дробах (2,4 год); надати готову таблицю «Швидкість/Час/Відстань», яку потрібно лише заповнити числами з тексту; надати одне рівняння системи, запропонувавши учню скласти друге за аналогією.

Базовий рівень: крім математичного розв'язку, учень має підрахувати вартість подорожі дізнавшись актуальну ціна 1 літра бензину А-95.

Для сильних учнів: додати змінну вітру. «Вітер створює опір, який зменшує швидкість човна проти течії на 5%, але не впливає на рух за течією»; «При якій швидкості течії (якщо вона раптом збільшиться навесні) пального в баку вистачить рівно впритул (залишок 0 літрів)?»

1.5. Числові послідовності: ритм чисел

1.5.1. Еко-ферма: крокуємо до сталого розвитку

Авторка: *Черненко Ольга Павлівна, вчитель математики навчально-виховного комплексу «Загальноосвітня школа І–ІІІ ступенів №3-колегіум» Смілянської міської ради Черкаської області*

Опис ситуації: Молоде фермерське господарство «Родюча нива» планує розширювати площу своїх садів. Для ефективного планування вони розглядають дві стратегії посадки дерев:



Модель А: Фермери планують кожного року збільшувати кількість нових саджанців на одну й ту саму кількість. Відомо, що у другий рік роботи було висаджено **450 дерев**, а у п'ятий рік — **750 дерев**. У перший рік роботи ферма вже мала базовий сад із

350 дерев.

Модель Б: Фермери вирішили, що кількість нових саджанців кожного року має зростати на певний відсоток від кількості дерев, висаджених у попередньому році. Відомо, що за перший рік було висаджено **400 дерев**, а за другий — **440 дерев**.

Завдання:

1. Визначте щорічну різницю приросту дерев для **моделі А** та запишіть формулу для обчислення кількості висаджених дерев за будь-який -й рік.
2. Обчисліть, яку кількість дерев висадять фермери за **10-й рік** роботи за **моделлю А**.
3. Якщо фермери оберуть **модель Б**, то на скільки відсотків збільшуватиметься кількість саджанців щороку? Обчисліть загальну кількість висаджених дерев за перші **3 роки** за цією моделлю.
4. Визначте, через скільки років загальна кількість дерев у саду за **моделлю А** перевищить **5000 одиниць**, враховуючи початкові 350 дерев.

Методичні рекомендації для вчителя

Очікувані результати навчання:

• **Предметна компетентність:** Учень пояснює зміст понять арифметична та геометрична прогресія; знаходить різницю та знаменник; моделює реальні фінансові та господарські ситуації за допомогою послідовностей.

• **Ключові компетентності:** Екологічна грамотність (усвідомлення важливості сталого розвитку); Фінансова грамотність (планування ресурсів на довгий термін).

Повне розв'язання (для перевірки):

Модель А (Арифметична прогресія):

$$a_2 = 450; a_5 = 750$$

$$a_5 - a_2 = 3d \Rightarrow 750 - 450 = 300 \Rightarrow d = 100 \text{ дерев/рік}$$

$$a_1 = a_2 - d = 450 - 100 = 350 \text{ дерев}$$

Формула: $a_n = 350 + 100(n - 1) = 100n + 250$

10-й рік (Модель А): $a_{10} = 100 \cdot 10 + 250 = 1250$ дерев

Модель Б (Геометрична прогресія):

$$b_1 = 400; b_2 = 440; q = \frac{440}{400} = 1,1. \text{ Приріст складає } 10\% \text{ щороку.}$$

$$\text{Сума за 3 роки: } S_3 = \frac{400(1,1^3 - 1)}{1,1 - 1} = \frac{400(1,331 - 1)}{0,1} = 4000 \cdot 0,331 = 1324$$

дерева.

Окупність/Межа (Модель А):

Загальна кількість: Початкові $350 + S_n \geq 5000$

$$S_n = \frac{2 \cdot 350 + (n - 1) \cdot 100}{2} \cdot n = (350 + 50n - 50)n = 300n + 50n^2$$

$$50n^2 + 300n + 350 \geq 5000 \Rightarrow n^2 + 6n - 93 \geq 0$$

При $n = 7$: $49 + 42 - 93 = -2$ (мало). При $n = 8$: $64 + 48 - 93 = 19$.

Методичні рекомендації для вчителя

1. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

Учень/учениця:

Розуміє зміст понять арифметична та геометрична послідовності як моделей реальних процесів.

Знає та **вміє** застосовувати формули n -го члена та суми перших n членів для обох видів прогресій.

Знаходить параметри послідовностей (a_1, d, b_1, q) на основі непрямих даних (наприклад, за двома несусідніми членами).

Моделює реальні ситуації (фінансові розрахунки, господарське планування, приріст потужностей) за допомогою математичного апарату.

Аналізує отримані результати, порівнює різні стратегії розвитку та робить обґрунтований вибір.

2. Ключові компетентності та наскрізні вміння

Екологічна грамотність: усвідомлення переваг багаторічних насаджень та сталого розвитку фермерства.

Фінансова грамотність: обчислення відсоткового приросту (складні відсотки) та прогнозування термінів «окупності» або виходу на заплановані потужності.

ІКТ-компетентність: можливість використання табличних процесорів (Excel/Google Таблиці) для перевірки результатів, особливо для Моделі Б.

Логічне обґрунтування: здатність чітко аргументувати, яка модель є ефективнішою в короткостроковій чи довгостроковій перспективі.

Можливі варіанти диференціації

• **Для «слабших» учнів:** Надати картку-підказку з алгоритмом: Крок 1 — Знайдіть d ; Крок 2 — Знайдіть a_1 ; Крок 3 — Використайте формулу S_n .

• **Для «сильніших» учнів:** Запропонувати порівняти обидві моделі через 10 років: за якої стратегії загальна кількість дерев буде більшою? Це вимагатиме розрахунку S_{10} для геометричної прогресії.

Диференціація за змістом (Що вивчаємо?)

Цей варіант адаптує самі дані або складність математичних операцій, не змінюючи основний сюжет задачі.

1. Спрощення числових даних:

• **Для слабших учнів:** Використовувати круглі числа для арифметичної прогресії (наприклад, $d = 100$ або $d = 50$) та простіші відсотки для геометричної ($q = 1,5$ або $q = 2$), щоб уникнути громіздких обчислень із десятковими дробами, особливо в завданнях на знаходження суми.

• **Для сильніших учнів:** Ввести нецілочисельні або дробові значення приросту. Наприклад, прибуток зростає на 12,5% ($q = 1,125$) або площа саду збільшується на 1,2 га щороку, що значно ускладнить розрахунок S_n .

2. Виключення або додавання надлишкових даних:

• **Для слабших учнів:** Заздалегідь прибрати частину умови, яка вимагає додаткових кроків. Наприклад, одразу вказати значення першого члена $a_1 = 350$, щоб учень міг зосередитися на формулі n -го члена, не витрачаючи час на пошук a_1 через систему рівнянь.

• **Для сильніших учнів:** Додати умови, що вимагають конвертації одиниць або врахування зовнішніх факторів (наприклад, врахувати відсоток дерев, що не прижилися), що змушує учня критично оцінювати модель.

3. Зміна типу прогресії:

• **Для сильніших учнів:** Попросити розрахувати термін досягнення мети (окупності), обравши не Модель А, а Модель Б (геометричну прогресію).

Це вимагатиме розв'язання показникової нерівності або використання логарифмування (чи методу ітераційного підбору), що виходить за межі стандартної програми 9 класу та стимулює дослідницьку діяльність.

Диференціація за процесом (Як працюємо?)

Різна ступінь підтримки (сходінки допомоги):

Для слабших учнів: надати алгоритм-підказку, подібний до того, що є у зразку:

• *Крок 1:* Знайдіть d за формулою $a_n - a_k = d(n - k)$.

• *Крок 2:* Визначте a_1 .

• *Крок 3:* Використайте формулу S_n для підрахунку загальної кількості дерев.

Для сильніших учнів: запропонувати самостійно сформулювати критерії вибору найбільш ефективної моделі для ферми на найближчі 20 років.

Диференціація за результатом (Що отримуємо?)

Цей варіант адаптує форму подання кінцевого продукту та глибину висновків за результатами розв'язання.

1. Обов'язковий та додатковий результат:

- **Обов'язковий результат (для всіх):** учні мають розв'язати завдання 1 і 2 (Модель А), демонструючи базове розуміння та вміння застосовувати формули арифметичної прогресії для обчислення d , a_1 та a_2 .

- **Додатковий результат (для учнів, які швидко впоралися):**

- ✓ **Створити порівняльну візуалізацію (графік):** Побудувати графіки росту кількості дерев для **Моделі А** та **Моделі Б** за 10 років (на папері або в Excel).
- ✓ **Написати коротке резюме для "фермера":** Аргументовано пояснити, яку модель варто обрати, якщо господарство планує працювати більше 15 років (враховуючи, що геометрична прогресія з часом зростає швидше за арифметичну).

2. Формат подання:

- **Письмовий звіт:** Традиційне розв'язання в зошиті з чітким описом кожного кроку та логічним висновком.

- **Презентація або постер:** Учень може оформити розв'язок у вигляді інфографіки «План розвитку саду», де математичні розрахунки супроводжуються візуальними поясненнями та висновками щодо екологічної доцільності.

- **Інтерактивна модель:** Для учнів з високим рівнем ІКТ-компетентності результатом може бути створений калькулятор у **Google Таблицях**, який автоматично розраховує кількість дерев залежно від введених параметрів (d або % зростання).

Групова робота (соціальна диференціація)

- **Гетерогенні групи:** Сформувати групи, де учні з вищим рівнем підготовки допомагають іншим зрозуміти логіку переходу від тексту до математичної моделі (завдання 4), а учні з середнім рівнем фокусуються на точності обчислень суми S_n (завдання 3).

Орієнтовні критерії оцінювання

<i>Рівень</i>	<i>Бали</i>	<i>МАО 1 Дослідження ситуації</i>	<i>МАО 2 Моделювання та стратегія</i>	<i>МАО 3 Критичне оцінювання</i>
Початковий	1–3	Визначає окремі числові дані, але не формулює проблему або формулює її неточно.	Не встановлює тип залежності або робить це помилково. Відсутня математична модель.	Не аналізує результат або робить без обґрунтування.
Середній	4–6	Формулює проблему (порівняння моделей), частково виокремлює відому й невідому інформацію.	Розпізнає арифметичну та геометричну прогресії, але допускає помилки у формулах або обчисленнях. Стратегія неповна.	Робить просте порівняння результатів без глибокого аналізу доцільності.
Достатній	7–9	Чітко формулює проблему, встановлює математичний характер залежностей (лінійна / експоненціальна).	Коректно складає математичні моделі: Модель А – арифметична прогресія; Модель Б – геометрична прогресія. Обчислення здебільшого правильні.	Аналізує отримані результати, пояснює різницю між лінійним та відсотковим зростанням. Робить аргументований висновок.
Високий	10–12	Самостійно структурує задачу, робить припущення, визначає додаткові запитання (наприклад, довгострокова перспектива).	Повністю коректно будує моделі, знаходить параметри прогресій, може подати загальні формули, будує прогноз. Пропонує оптимальну стратегію з урахуванням умов сталого розвитку.	Дає розгорнуте критичне оцінювання: аналізує ефективність, ризики, екологічну доцільність, порівнює темпи зростання в довгостроковій перспективі.



ЕКО-ФЕРМА "РОДЮЧА НИВА"

Крокуємо до сталого розвитку



СИТУАЦІЯ

- ✓ Ферма планує розширення садів. Розглядають дві моделі зростання кількості нових дерев.



МОДЕЛЬ А – ЛІНІЙНЕ ЗРОСТАННЯ

(Арифметична прогресія)

- ✓ Щороку додається однакова кількість дерев
- ✓ 2-й рік – 450 дерев
- ✓ 5-й рік – 750 дерев



Знаходимо **приріст**:

$$750 - 450 = 300$$

$$300 + 3 = 100 \text{ дерев/рік}$$

- ✓ 10-й рік: $a_{10} = 1250$ дерев



ПОРІВНЯННЯ МОДЕЛЕЙ

- ✓ Чи вистачить ресурсів?
- ✓ Чи витримає земля інтенсивність росту?
- ✓ Яка модель безпечніша екологічно?



МОДЕЛЬ А

Лінійний

+100 дерев

Висока

Помірний



МОДЕЛЬ Б

Експоненціальний

+10%

Залежить від ресурсів

Швидке зростання

- ✓ Тип зростання; прискорене (експоненціальне)



ПОРІВНЯННЯ МОДЕЛЕЙ

Критерій	Модель А	Модель Б
✓ Тип росту	Лінійний	Експоненціальний
✓ Приріст	+100 дерев	+10%
✓ Стабільність	Висока	Залежить від ресурсів
✓ Довгостроковий ефект	Помірний	Швидке зростання



ЩО ФОРМУЄ ЗАВДАННЯ? (НУШ)

- ✗ МАО1 реальної ситуації
- ✗ МАО 2 Побудова математичної моделі
- ✓ МАО 3 Критичне оцінювання



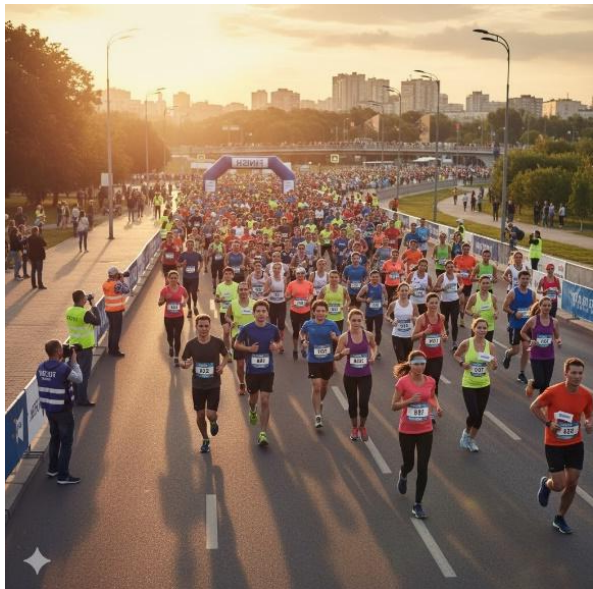
ВИСНОВОК

- ✓ Модель А – стабільність
- ✓ Модель Б – швидке зростання
- ✓ Вибір залежить від довгострокової стратегії ферми

1.5.2. Спортивна підготовка до благодійного марафону

Авторка: *Кузьменко Лариса Олександрівна, вчитель математики Черкаського гуманітарно-правового ліцею Черкаської міської ради Черкаської області*

Марафон - це забіг на дистанцію 42 кілометри 195 метрів (42.195 км). Це одна з найпрестижніших дисциплін легкої атлетики, що входить до



програми Олімпійських ігор. За легендою, у 490 році до н.е. грецький воїн Фідіппід пробіг від міста Марафон до Афін, щоб сповістити про перемогу над персами. Вигукнувши «Радійте, ми перемогли!», він упав замертво. Дистанція в 42.195 км з'явилася лише на Олімпіаді в Лондоні (1908 р.). Початково вона мала бути 42 км, але її подовжили на 195 метрів, щоб фініш був прямо навпроти королівської ложі стадіону.

Учень 9-го класу Максим вирішив взяти участь у благодійному забігу «Кілометри добра», що відбудеться за кілька місяців. Для підготовки тренер розробив для нього дві стратегії збільшення навантаження. Максим має обрати одну з них, щоб підготуватися максимально ефективно та не отримати травму.

Стратегія 1 (Арифметична стратегія): Щодня дистанція збільшується на одну й ту саму сталу величину. Відомо, що на 3-й день тренування Максим має пробігти 4,5 км, а на 7-й день – 6,5 км. У перший день тренування Максим пробіг 3,5 км. Загальна дистанція марафону становить 21 км.

Стратегія 2 (Геометрична стратегія): Щодня дистанція збільшується на певний відсоток від дистанції попереднього дня. Відомо, що за перший день Максим пробіг 4 км, а за другий – 4,4 км. Під час забігу будуть використовуватись професійні кросівки з амортизацією, вартість яких 3200 грн.

Завдання

1. Визначте, на скільки кілометрів збільшується щоденна дистанція за стратегією 1, та запишіть формулу n -го члена для цієї послідовності.
2. Обчисліть, яку дистанцію (у кілометрах) має подолати Максим на 14-й день тренувань, якщо він обере стратегію 1.
3. Якщо Максим обере стратегію 2, то на скільки відсотків щодня зростатиме його навантаження? Обчисліть загальну відстань (у

кілометрах), яку він подолає за перший робочий тиждень (перші 5 днів тренувань) за цією стратегією.

4. Максиму потрібно за одне тренування пробігти дистанцію, що дорівнює або перевищує дистанцію марафону (21 км). Визначте, на який мінімальний день тренувань це станеться, якщо він обере стратегію 1.

Очікувані результати навчання

Предметна компетентність (математична)

Учень/учениця пояснює зміст понять арифметична та геометрична прогресія та застосовує відповідні

формули для моделювання спортивних тренувань.

- Знає означення арифметичної та геометричної прогресії, формули n -го члена та формули n -перших членів прогресій.

- Знаходить різницю арифметичної та знаменник геометричної прогресій.

- Моделює реальні ситуації (збільшення фізичного навантаження) за допомогою числових послідовностей.

- Виконує обчислення з відсотками (щоденний приріст дистанції), розв'язує лінійні нерівності для визначення терміну досягнення мети (вихід на дистанцію 21 км).

I. Ключові компетентності

1. Екологічна грамотність

- Усвідомлює важливість системного підходу до фізичних тренувань як основи збереження здоров'я.

- Розуміє ризики надмірного навантаження (травматизм) при обранні агресивної стратегії підготовки.

2. Інформаційно-комунікативна компетентність

- Опрацьовує дані задачі, виокремлюючи необхідну інформацію та відкидаючи надлишкові дані (наприклад, вартість професійних кросівок при розрахунку дистанції).

- Використовує обчислювальні засоби для роботи зі степенями (наприклад, $1,1^5$) при розрахунку сумарної дистанції за тиждень.

3. Фінансова грамотність та підприємливість

- Аналізує дві різні моделі зростання (лінійне та відсоткове) та оцінює їхню ефективність для досягнення конкретної мети.

- Зіставляє витрати (вартість екіпірування) з довгостроковими цілями (участь у благодійному марафоні).

4. Уміння навчатися впродовж життя

- Класифікує умови задачі: самостійно визначає, яку математичну модель (арифметичну чи геометричну прогресію) застосувати залежно від типу опису приросту («на певну величину» чи «на певний відсоток»).

- Прогнозує результати своєї діяльності на тривалий термін (36 днів підготовки).

II. Наскрізні вміння

•Читання з розумінням: Здатність точно інтерпретувати текст умови, розрізняючи характеристики двох різних стратегій та ідентифікуючи ключові параметри .

•Логічне обґрунтування: Здатність чітко будувати алгоритм розв'язання: від знаходження параметрів прогресії до побудови загальної формули n-го члена.

•Розв'язування проблем: Здатність трансформувати спортивну ціль (пробігти 21 км) у математичну модель (пошук найменшого цілого n у нерівності), враховуючи реальні обмеження та потреби організму.

Розв'язання

1. Щоденна дистанція за стратегією 1 збільшується на 0,5 км.

$$a_3 = a_1 + 2d; \quad d = (a_3 - a_1) : 2 = (4,5 - 3,5) : 2 = 0,5 \text{ (км)}$$

Формула n-го члена: $a_n = a_1 + (n - 1)d = 3,5 + (n - 1) \cdot 0,5 = 3 + 0,5n$

2 . На 14-й день тренувань має бути подолано 10 км.

$$a_{14} = a_1 + 13 \cdot d = 3,5 + 13 \cdot 0,5 = 10 \text{ (км)}$$

$$3. q = \frac{b_2}{b_1} = 1,1$$

Отже, за стратегією 2, кожного дня йде збільшення на 10%.

Дистанція, яку буде подолано за перший робочий тиждень: $S_5 = \frac{b_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{4(1-1,1^5)}{1-1,1} = 24,4204 \text{ (км)}$

4.Щоб дізнатися на який день можливо пробігти 21 км за стратегією 1, потрібно розв'язати нерівність:

$$a_1 + (n - 1) \cdot d \geq 21;$$

$$3,5+(n-1)0,5 \geq 21$$

$$0,5n \geq 21$$

$$n \geq 36$$

На 36-й день.

Орієнтовні критерії оцінювання

Рівень	Бали	[MAO 1] Дослідження ситуації	[MAO 2] Моделювання та стратегія	[MAO 3] Критичне оцінювання
Початковий	1–3	Випишує окремі числа з тексту (42,195 км, 3200 грн). Плутає стратегії або не може визначити, де d, а де q.	Записує формули з помилками. Намагається додати 0.5 км до попереднього дня вручну, але збивається на 3–4 кроці.	Відповідь не містить логічного висновку. Учень не розрізняє метри та кілометри в контексті задачі.
Середній	4–6	Правильно ідентифікує Стратегію 1 як арифметичну, а Стратегію 2 як геометричну.	Обчислює дистанцію на 14-й день (a_{14}) за формулою, але припускається помилок у	Дає відповідь на запитання, але не може пояснити, чому ціна кросівок (3200 грн) не

		Знаходить $d = 0.5$ км.	розрахунках суми S_5 для Стратегії 2.	потрібна для розв'язання задачі.
Достатній	7–9	Коректно виокремлює всі параметри: $a_1=3.5$, $d=0.5$; $b_1=4$, $q=1.1$. Відкидає нерелевантні дані про 1908 рік та кросівки.	Правильно складає формулу n -го члена $a_n = 3 + 0.5n$. Знаходить суму за 5 днів для Стратегії 2 та день досягнення 21 км ($n = 36$).	Робить чіткий висновок про день досягнення мети. Пояснює різницю між щоденним навантаженням та сумарною дистанцією за тиждень.
Високий	10–12	Аналізує умови зростання. Самостійно виводить формулу залежності та перевіряє її на контрольних точках (3-й та 7-й дні).	Безпомилково розв'язує утворену нерівність. Демонструє володіння розрахунком відсотків (10\%) та сумою геометричної прогресії.	Критично оцінює результати: наприклад, зауважує, що за Стратегією 1 підготовка триватиме більше місяця (36 днів), що важливо для планування марафону.

Можливі варіанти диференціації

Охоплюють зміст, процес і результат, дозволяючи адаптувати її для учнів з різним рівнем підготовки та стилем навчання.

Диференціація за змістом (Що вивчаємо?)

Цей варіант адаптує самі дані або складність математичних об'єктів.

1. Спрощення числових даних:

- Для учнів з базовим рівнем: Використовувати цілі числа для щоденного зросту дистанції та простіші відсотки для стратегії 2, щоб зосередити учнів на розумінні суті прогресії, а не на операції з дробами.
- Для учнів з високим рівнем: Ввести дробові значення відсотків (наприклад, зростання на 7,5% щодня) або задати параметри Стратегії 1 через систему рівнянь, де не даватиметься значення a_1 .

2. Робота з контекстом та даними:

- Для учнів з базовим рівнем: Чітко виділити в тексті, що Стратегія 1 – це додавання, а Стратегія 2 – це множення. Прибрати другорядну інформацію про вартість кросівок (3200 грн.), щоб вона не відволікала від розрахунку кілометрів.
- Для учнів з високим рівнем: Додати умову про обмеження: «Максим може тренуватися не більше 40 днів до забігу». Чи встигне він досягти мети за обома стратегіями?

3. Зміна складності завдання (логічний виклик):

Для учнів з високим рівнем: додати завдання на порівняння: «На який день сумарна дистанція, що буде подолана за весь час тренувань, у Стратегії 2 перевищить сумарну дистанцію Стратегії 1?» Це вимагатиме порівняння суми арифметичної і геометричної прогресії.

Диференціація за процесом (Як працюємо?)

Цей варіант адаптує спосіб виконання завдань, забезпечуючи різну підтримку.

1. Різна ступінь підтримки (сходінки допомоги):

- **Для учнів з базовим рівнем:** надати алгоритм-підказку:
- **Для учнів з високим рівнем:** запропонувати розв'язати задачу графічним методом (побудувати графік функцій для обох стратегій та знайти точку їхнього перетину).

2. Використання ІТ – інструментів: дозволити учням використовувати Excel або Google Таблиці для моделювання стратегій. Використання для Стратегії 1 дозволить побачити «магію складних відсотків» наочно, заощаджуючи час на піднесення до степеня.

3. Групова взаємодія: провести рольову гру – об'єднати клас у групи «Аналітики Стратегії 1» та «Аналітики Стратегії 2». Кожна група готує аргументи «за» і «проти» своєї моделі (наприклад, стабільність проти швидкого прогресу).

Диференціація за результатом (Що отримаємо?)

Цей варіант адаптує форму подання кінцевого продукту.

• Обов'язковий та додатковий результат:

✓ **Обов'язковий результат:** розрахунок різниці та знаменника прогресій та знаходження значень для 14-го дня.

✓ **Додатковий результат:** скласти «Графік тренувань» на місяць у вигляді таблиці та дати обґрунтовану пораду спортсмену: яку стратегію обрати, враховуючи ризик травм.

• Формат подання:

✓ **Математичний звіт:** традиційний запис формул та обчислень у зошиті.

✓ **Тренерський план:** створення візуального постера або цифрової презентації «План підготовки до марафону», де математичні розрахунки є частиною спортивної програми.

1.5.3. Мікросвіт у вашій кишені: математика та біологія смартфонів

Авторка: *Кузьменко Лариса Олександрівна, вчитель математики Черкаського гуманітарно-правового ліцею Черкаської міської ради Черкаської області*

Ви коли-небудь замислювалися, що ваш смартфон — це найбільш подорожуючий об'єкт у вашому житті? Він буває у вашій кишені, на столі в кафе, у громадському транспорті. Вчені з **Університету Аризони** з'ясували вражаючий факт: на 1 см^2 поверхні середньостатистичного смартфона мешкає близько **25 000 бактерій**. Це в 10 разів більше, ніж на сидінні унітазу, де їх зазвичай налічується близько **1 200** на ту саму площу.



У мікросвіті панує закон **геометричної прогресії**. Бактерії не шукають пару — вони розмножуються шляхом **бінарного поділу**. За оптимальних умов (температура близько 37°C , яку підтримує процесор смартфона та тепло вашого тіла) одна бактерія ділиться кожні **20 хвилин**.

Коли армія мікробів стає загрозою, медицина використовує антибіотики. Це вибіркова зброя, що атакує специфічні мішені. Якісний антисептик або антибіотик здатний знищити до **99.9%** популяції. Проте залишені **0.1%** (найстійкіші) можуть відновити чисельність колонії за лічені години завдяки тій самій прогресії.

Завдання:

1. Знайдіть знаменник геометричної прогресії, що описує роботу розмноження бактерій.
2. Яка кількість бактерій буде на середньостатистичному смартфоні через 2 години?
3. Смартфон був без обробки антисептиком 2 години. Потім відбулася обробка якісним антисептиком. За скільки годин кількість бактерій, що залишилися після обробки антисептиком, стане такою, як до обробки?

Очікувані результати навчання

I. Предметна компетентність (математична)

Учень/учениця пояснює зміст поняття геометрична прогресія та застосовує відповідні формули для моделювання біологічних процесів.

• **Знає** означення геометричної прогресії, формулу n -го члена та розуміє біологічний зміст знаменника q у контексті бінарного поділу.

• **Знаходить** знаменник q геометричної прогресії, виходячи з текстового опису процесу (подвоєння).

• **Моделює** реальні ситуації (ріст популяції бактерій, поширення інфекції) за допомогою числових послідовностей.

• **Виконує** обчислення, пов'язані з великими числами та відсотками (ефективність антисептика), і розв'язує рівняння/нерівності для визначення часу відновлення популяції.

II. Ключові компетентності

1. Компетентність у природничих науках і технологіях (екологічна грамотність)

• Усвідомлює небезпеку невидимого мікросвіту та важливість гігієни гаджетів.

• Розуміє механізм дії антибіотиків та антисептиків як інструментів контролю біологічних популяцій.

2. Інформаційно-комунікаційна компетентність (ІКТ)

• Опрацьовує дані задачі, виокремлюючи необхідні параметри (час поділу, початкова кількість) та відкидаючи надлишкову інформацію (назви університетів).

• Використовує калькулятор або електронні таблиці для обчислення високих степенів числа 2.

3. Екологічна грамотність і здорове життя

• Аналізує ризики швидкого відновлення бактерій (регенерація 0,1% тих, що вижили).

• Оцінює критичність часових інтервалів у контексті біологічної загрози.

4. Уміння навчатися впродовж життя

• Класифікує умови задачі: розрізняє статичні дані (кількість на 1 см²) та динамічні процеси (поділ кожні 20 хв).

• Самостійно переводить часові одиниці (години у цикли поділу) для коректного застосування математичної моделі.

III. Наскрізні вміння

• **Читання з розумінням:** Здатність точно інтерпретувати науково-популярний текст, визначаючи перший член послідовності, знаменник та кількість періодів.

• **Логічне обґрунтування:** Здатність чітко формулювати послідовність кроків: від розрахунку загальної кількості бактерій до визначення відсотка тих, що вижили після дезінфекції.

• **Розв'язування проблем:** Здатність перетворити текстову проблему «біологічної загрози» на математичну модель, що вимагає розуміння методу підбору степеня.

Розв'язання

1. Знаходження знаменника прогресії, якою відбувається поділ бактерій: $q=2$.

2. Обчислення кількості бактерій через 2 та 5 годин.

За одну годину поділ бактерій відбувається тричі, тому для знаходження кількості бактерій через 2 години треба знайти b_7 : $b_7 = b_1 \cdot q^6 = 25000 \cdot 64 = 1600000$ бактерій.

3. Щоб проаналізувати відновлення популяції після антисептика, треба:

- Через 2 години бактерій було 1600000. (відомості з попереднього пункту)

- Антисептик знищує 99,9% популяції, залишається 0,1%. Вижили: $1600000 \cdot 0,001 = 1600$.

- Визначимо час відновлення популяції: $1600 \cdot 2^n = 1600000$; $2^n = 1000$; $n \approx 10$. Отже, відбувається 10 циклів поділу. Один цикл поділу 20 хвилин. Тоді відновлення станеться через 10 циклів $\cdot 20$ хвилин $= 200$ хвилин $= 3$ години 20 хвилин.

Орієнтовні критерії оцінювання

<i>Рівень</i>	<i>Бали</i>	<i>[MAO 1] Дослідження ситуації</i>	<i>[MAO 2] Моделювання та стратегія</i>	<i>[MAO 3] Критичне оцінювання</i>
Початковий	1–3	Випишує числа: 25 000, 10 разів, 99.9%. Не розуміє зв'язку між «поділом навпіл» та знаменником прогресії.	Намагається помножити 25 000 на 20 хвилин. Не може визначити кількість етапів поділу (n) за 2 години.	Не усвідомлює масштабів зростання. Висновок відсутній або нелогічний (наприклад, бактерій стає менше).
Середній	4–6	Розуміє, що знаменник $q = 2$. Визначає, що за 2 години відбудеться 6 поділів ($120 / 20 = 6$), але плутає порядковий номер члена b_n .	Розраховує кількість бактерій через 2 години з помилками. Не знає, як вирахувати 0.1% залишку.	Дає відповідь на рівні розрахунків. Не пов'язує математичну модель із біологічним процесом відновлення популяції.
Достатній	7–9	Чітко виокремлює параметри: b_1 , q , час кроку. Коректно трактує «знищення 99.9%» як залишок 0.001.	Правильно обчислює популяцію через 2 год та кількість мікробів після антисептика. Знаходить час відновлення через q^n .	Робить висновок про важливість ретельної дезінфекції. Пояснює, що навіть 0.1% — це велика кількість життєздатних мікроорганізмів.
Високий	10–12	Аналізує динаміку: чому через 2 години	Складає рівняння для пошуку часу відновлення.	Критично оцінює швидкість «реваншу» бактерій. Робить

		ми шукаємо саме b_7 (якщо рахувати від початкового моменту). Розуміє циклічність процесу.	Демонструє вільне володіння степенями двійки та логікою зворотного розрахунку.	узагальнення про ефективність антибіотиків/антисептиків та умови, що сприяють розмноженню (тепло процесора).
--	--	---	--	--

Можливі варіанти диференціації

Охоплюють зміст, процес і результат, дозволяючи адаптувати її для учнів з різним рівнем підготовки та стилем навчання.

Диференціація за змістом (Що вивчаємо?)

1. Спрощення або ускладнення числових даних:

- **Для учнів з базовим рівнем:** використовувати меншу початкову кількість бактерій, щоб зробити проміжні результати візуально простішими, або округлити ефективність антисептика до 99%, що полегшить роботу з частками.

- **Для сильніших учнів:** ввести змінні умови. Наприклад: «Через нагрівання процесору швидкість поділу збільшиться, і тепер поділ відбувається кожні 15 хвилин». Це змінить кількість періодів у розрахунках.

2. Керування надлишковими даними:

- **Для слабших учнів:** Прибрати з тексту назву університету, залишивши лише кількість бактерій на 1 квадратний сантиметр.

- **Для сильніших учнів:** Залишити всі дані та додати площу екрану смартфона, щоб учні спочатку розраховали загальну кількість бактерій на всій поверхні, а вже потім будували прогресію.

Диференціація за процесом (Як працюємо?)

Цей варіант адаптує спосіб виконання завдань, забезпечуючи різну підтримку.

1. Різна ступінь підтримки (сходінки допомоги):

- **Для слабших учнів:** надати чек-лист.
- **Для сильніших учнів:** запропонувати самостійно розв'язати всі завдання без допомоги.

2. **Групова робота:** об'єднати учнів у «лабораторії». «Біолог» виписує дані, «Математик» - підбирає формули, «Лаборант» - проводить обчислення.

- **Використання інструментів:** дозволити використання калькуляторів для обчислення степенів; для слабших учнів дозволити використання Excel для створення таблиці «Час - Кількість», щоб вони побачили прогресію в дії без заучування формул.

Диференціація за результатом (Що отримуємо?)

Цей варіант адаптує форму подання кінцевого продукту.

• **Обов'язковий та додатковий результати:**

Обов'язковий результат: усі учні мають знайти кількість бактерій через 2 години та пояснити значення знаменника.

- **Додатковий результат:** учні, які швидко виконали обов'язкову частину, мають: обґрунтувати, чому антисептик з ефективністю 99,9% не дає «вічного» захисту; розрахувати, через який час маса бактерій зрівняється з масою самого смартфона.

- **Формат подання:** **традиційний** – письмовий розв'язок у зошиті; **творчий** – створення інфографіки: попередження для однокласників: «Що відбувається з твоїм телефоном за час уроку»; **цифровий:** побудова графіка росту популяції в GeoGebra або Desmos.

1.5.4. Інформаційна епідемія: чи вистачить у вас антитіл?

Авторка: *Кузьменко Лариса Олександрівна, вчитель математики Черкаського гуманітарно-правового ліцею Черкаської міської ради Черкаської області*

Медіаграмотність - це не просто нудне правило, а «цифрова гігієна». Одна людина, яка зупинилася і не зробила репост, може врятувати тисячі людей від паніки або помилки. Це працює як вакцинація: чим більше



скептиків, тим важче брехні «заразити» суспільство.

Вчені помітили, що новини в TikTok або Instagram поширюються точно так само, як вірус грипу. Кожна людина, що «підхопила» новину (прочитала її), стає носієм. Але чи стане ця новина **пандемією** (вірусною), залежить від

показника, який у науці називають **базовим репродуктивним числом**. Якщо це число дорівнює 2, то це означає, що кожен глядач пересилає відео двом друзям. А якщо репродуктивне число менше за 1, то новина «вмирає» і не стає популярною.

Завдання:

1. Учень 9 класу о 15:00 опублікував фейк у сторіз. Припустимо, що кожні 20 хвилин кількість нових людей, які дізнаються новину, потроюються. Першим був сам автор. Скільки нових учнів дізнаються про новину на 6-му етапі поширення (тобто через 100 хвилин)?

2. У школі навчається 730 учнів. Новина поширюється хвилями: 1-ша хвиля – 1 учень, 2-га хвиля – 3 учні, 3-тя хвиля – 9 учнів і так далі (кількість нових носіїв щоразу множить на 3). Через скільки «хвиль» (етапів) новина охопить усю школу?

3. У паралельному класі учні пройшли тренінг з медіаграмотності. Через це новина поширюється повільніше: замість того, щоб передавати її трьом людям, кожен передає її лише двом. Порівняйте кількість «заражених» на 5-му етапі в першому випадку та другому. У скільки разів медіаграмотність зменшила масштаб паніки на цьому етапі?

4. Відомо, що при кожній передачі новини від людини до людини 10% інформації спотворюється. Якщо на 1-му етапі новина була на 100% правдивою, то на кожному наступному кроці вона множить на 0,9. Який відсоток правди залишиться в новині на 10-му кроці передачі?

Очікувані результати навчання

I. Предметна компетентність (математична)

Учень/учениця пояснює зміст поняття геометрична прогресія та застосовує її формули для моделювання біологічних соціальних і мережевих процесів.

- **Знає** означення геометричної прогресії, формулу n -го члена та розуміє соціальний зміст знаменника q як «репродуктивного числа» новини.

- **Знаходить** знаменник q геометричної прогресії, виходячи з текстового опису (подвоєння чи потроєння охоплення).

- **Моделює** реальні ситуації (вірусний маркетинг, поширення фейків) за допомогою числових послідовностей.

- **Виконує** обчислення, пов'язані з великими числами та відсотками (спотворення інформації), і розв'язує рівняння/нерівності для визначення моменту охоплення всіх учнів.

II. Ключові компетентності

1. Інформаційно-комунікаційна компетентність (ІКТ)

- Усвідомлює небезпеку «цифрових вірусів» та важливість інформаційної гігієни.

- Розуміє механізм роботи алгоритмів соцмереж, де кожна взаємодія збільшує охоплення.

- Опрацьовує дані задачі, виокремлюючи математичні параметри із текстового сюжету.

2. Громадянська та соціальна компетентності

- Оцінює вплив власної поведінки в мережі на суспільний спокій (відмова від репосту як «вакцинація»).

- Порівнює наслідки дій медіаграмотного класу та стихійного поширення паніки.

3. Уміння навчатися впродовж життя

- Класифікує типи поширення даних: розрізняє статичну кількість учнів у школі та динамічні «хвилі» інформування.

- Самостійно переводить часові інтервали (хвилини у кроки прогресії) для коректної побудови математичної моделі.

III. Наскрізні вміння

- **Читання з розумінням:** здатність інтерпретувати метафору «новина як вірус» та перекладати її на мову математичних формул.

- **Критичне мислення:** здатність оцінити, як незначне спотворення на кожному етапі призводить до повної втрати правдивості в кінці ланцюжка.

- **Логічне обґрунтування:** здатність чітко пояснити, чому зменшення знаменника прогресії лише на одиницю (з 3 до 2) суттєво змінює підсумковий масштаб «паніки».

- **Розв'язування проблем:** здатність перетворити соціальну проблему (фейк у школі) на математичну задачу, що вимагає розрахунки суми геометричної прогресії або пошуку номера члена послідовності.

Розв'язання

1. Потрібно знайти 6-й член прогресії: $b_6 = b_1 \cdot q^5 = 1 \cdot 3^5 = 243$.
На 6-му етапі новину дізнаються 243 нових учні.

2. Треба знайти суму членів геометричної прогресії, яка має бути ≥ 730 .

$$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}; \frac{1 \cdot (3^n-1)}{3-1} = 730; 3^n = 1461$$

$3^6 = 729$ (майже вся школа); $3^7 = 2187$. Новина охопить всю школу на 7 – й хвили.

3. Порівняємо два випадки на 5-му етапі:

- Без тренінгу: $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 81$ людина
- Після тренінгу: $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 16$ людей

Порівняємо: $81/16 = 5,0625$

Медіаграмотність зменшила масштаб паніки на цьому етапі у 5,06 рази.

4. Розглядається спадна геометрична прогресія: $b_1 = 100\%$, $q = 0,9$.

$$b_{10} = b_1 \cdot q^9 = 100 \cdot 0,9^9 = 100 \cdot 0,3874 = 38,74\%$$

На 10-му кроці в новині залишиться 38,74% правди.

Орієнтовні критерії оцінювання

Рівень	Бали	[MAO 1] Дослідження ситуації	[MAO 2] Моделювання та стратегія	[MAO 3] Критичне оцінювання
Початковий	1–3	Розпізнає ситуацію як «швидке зростання», але не ідентифікує $q=3$ або $q=2$. Плує «номер етапу» з «часом».	Записує числа хаотично. Намагається додавати 3 замість множення. Не розуміє значення показника 0,9 у 4-му завданні.	Не може пояснити, як медіаграмотність впливає на цифри. Висновки про «правдивість» новини відсутні.
Середній	4–6	Визначає параметри прогресії ($b_1=1$, $q=3$). Розуміє, що 100 хвилин — це 5 кроків після автора (всього 6 етапів).	Обчислює b_6 за формулою, але припускається помилок у розрахунку суми S_n для всієї школи. Намагається порівняти два випадки (завдання 3).	Робить базовий висновок: «якщо передавати меншій кількості людей, паніка буде меншою». Не обчислює «у скільки разів».
Достатній	7–9	Коректно виокремлює всі дані. Розуміє різницю між «новими людьми» (b_n) та «всіма охопленими» (S_n). Тракує	Правильно використовує формули b_n та S_n . Знаходить, що новина охопить школу на 7-й хвили.	Обґрунтовує, чому медіаграмотність є ефективною. Пояснює математично, як новина перетворюється на «зіпсований

		спотворення 10% як $q=0,9$.		телефон» (завдання 4).
Високий	10–12	Аналізує модель системно. Розуміє, що на 10-му кроці інформація стає майже не впізнаваною. Встановлює зв'язок між репродуктивним числом і швидкістю охоплення.	Безпомилково розв'язує показникові нерівності (або підбором степенів). Пропонує стратегію зупинки фейку.	Критично оцінює результат: робить узагальнення про «цифрову гігієну». Аргументує, як навіть незначна зміна показника q кардинально змінює фінальний масштаб події.

Можливі варіанти диференціації

Охоплюють зміст, процес і результат, дозволяючи адаптувати її для учнів з різним рівнем підготовки та стилем навчання.

Диференціація за змістом (Що вивчаємо?)

3. Спрощення або ускладнення числових даних:

- Для учнів з базовим рівнем: у 2-й задачі змінити кількість учнів у школі на 364 або 121, щоб відповідь була цілим числом без залишку при розрахунку суми.

- Для сильніших учнів: у 3-й задачі додати умову: «Через 40 хвилин після початку 10 учнів видалили фейк і перестали його поширювати». Як це змінить підсумкову кількість на 6-му етапі?

4. Керування надлишковими даними:

- Для слабших учнів: прямо вказати у 4-й задачі, що потрібно знайти 10-й член прогресії.

- Для сильніших учнів: додати інформацію про час публікації (15:00) та попросити розрахувати відсоток правди станом на 18:00, якщо передача відбувається кожні 15 хвилин.

Диференціація за процесом (Як працюємо?)

Цей варіант адаптує спосіб виконання завдань, забезпечуючи різну підтримку.

1. Різна ступінь підтримки (сходінки допомоги):

- Для слабших учнів: надати картку-підказку з формулами та таблицею степенів 2 і 3.

- Для сильніших учнів: запропонувати вивести формулу для 4-ї задачі самостійно, виходячи з логіки відсотків.

2. Групова робота:

об'єднати учнів у групи «Аналітики» - рахують охоплення, «Фактчекери» - рахують спотворення правди, «Психологи» - порівнюють вплив медіаграмотності.

3. Використання інструментів:

дозволити використання інженерних калькуляторів для обчислення степенів.

Диференціація за результатом (Що отримуємо?)

Цей варіант адаптує форму подання кінцевого продукту.

4. Обов'язковий та додатковий результат:

- **Обов'язковий результат:** правильно розв'язані перші дві задачі.

- **Додатковий результат:** побудувати графік залежності «Кількість людей - Час» для випадків $q=3$ і $q=2$ на одній системі координат.

5. **Формат подання:**

- **Традиційний:** розрахунки в зошиті з поясненням кожного кроку.

- **Творчий:** створення коміксу «Шлях одного фейку», де на кожній сторінці відображено етап прогресії.

- **Цифровий:** створення Excel-таблиці, яка автоматично рахує кількість «заражених» при зміні коефіцієнта «вірусності».

1.5.5. Інвестиції в «зелену» енергетику

Авторка: *Тищенко Ірина Анатоліївна, методист математики лабораторії природничо-математичних дисциплін КНЗ “Черкаський обласний інститут післядипломної освіти педагогічних працівників Черкаської обласної ради»*

Компанія «Еко-Енергія» займається встановленням домашніх сонячних електростанцій (СЕС). Для стимулювання клієнтів вони пропонують дві інвестиційні моделі з різним підходом до повернення вкладень.



Модель А: компанія гарантує, що прибуток від СЕС щомісяця буде збільшуватися на одну й ту саму суму. Відомо, що за другий місяць роботи СЕС клієнт отримав прибуток 3200 грн, а за п'ятий місяць — 5000 грн. Клієнт заплатив за СЕС 10 000 доларів США (курс 1 USD = 40 грн). У перший місяць роботи СЕС клієнт отримав чистий прибуток 2600 грн.

Модель Б: прибуток від СЕС щомісяця зростає на певний відсоток від прибутку попереднього місяця. Відомо, що за перший місяць прибуток склав 3000 грн, а за другий місяць — 3300 грн. Загальна кількість встановлених СЕС у регіоні за рік склала 245 одиниць.

Завдання

1. Визначте щомісячну різницю прибутку для **моделі А** та запишіть формулу для обчислення прибутку за будь-який n -й місяць.
2. Обчисліть, який прибуток (у гривнях) отримує клієнт за 10-й місяць роботи СЕС, інвестуючи за **моделлю А**.
3. Якщо клієнт обирає **модель Б**, то на скільки відсотків збільшиться прибуток щомісяця? Обчисліть загальний прибуток (у гривнях) за перші півроку (6 місяців) роботи СЕС.
4. Визначте, за який мінімальний час (ціла кількість місяців) клієнт повністю окупить свою інвестицію в СЕС (вартість 10 000 USD), обравши **модель А**. (Використовуйте курс 1 USD = 40 грн).

Методичні рекомендації для вчителя:

- очікувані результати навчання (згідно з НУШ),
- перелік компетентностей та наскрізних вмінь, що формуються,

- повне розв'язання,
- критерії оцінювання
- можливі варіанти диференціації.

Очікувані результати навчання

I. Предметна компетентність (математична)

Учень/учениця **пояснює** зміст понять **арифметична** та **геометрична прогресія** та **застосовує** відповідні формули для розв'язування задач.

- **Знає** означення арифметичної та геометричної прогресій, формули n -го члена та формули суми перших n членів.
- **Знаходить** різницю d арифметичної прогресії та знаменник q геометричної прогресії за двома членами.
- **Моделює** реальні ситуації (фінансові розрахунки, приріст, окупність) за допомогою числових послідовностей.
- **Виконує** обчислення, пов'язані з відсотками (зростання прибутку), та розв'язує **квадратні нерівності** для визначення мінімального часу (окупність)

II. Ключові компетентності

1. Компетентність у природничих науках і технологіях (екологічна грамотність)

- **Усвідомлює** економічні та екологічні переваги "зеленої" енергетики (СЕС) як теми для математичного моделювання

2. Інформаційно-комунікаційна компетентність (ІКТ)

- **Опрацьовує** дані задачі, **виокремлюючи** необхідну інформацію та **відкидаючи** надлишкові дані (наприклад, вартість в USD та курс при розрахунку прибутку, кількість встановлених СЕС).
- **Використовує** калькулятор або електронні таблиці для виконання складних обчислень (наприклад, $1,1^6$).

3. Фінансова грамотність та підприємливість

- **Аналізує** дві різні фінансові моделі (з лінійним та відсотковим зростанням прибутку).
- **Обчислює окупність** інвестиції, що є ключовим елементом економічного планування.
- **Оцінює** переваги та ризики різних інвестиційних стратегій.

4. Уміння навчатися впродовж життя

- **Класифікує** умови задачі: визначає, коли застосовувати арифметичну, а коли геометричну прогресію, залежно від типу приросту.
- **Працює** з різномісцевими завданнями, застосовуючи набуті знання для розв'язання практичної проблеми.

III. Наскрізні вміння

- **Читання з розумінням:** Здатність точно інтерпретувати текст задачі, визначаючи ключові числові дані та їхню функціональну роль (перший член, різниця/знаменник, сума, надлишковість).

- **Логічне обґрунтування:** Здатність чітко формулювати послідовність кроків для розв'язання (наприклад, переведення вартості USD у грн, визначення формули для S_n , знаходження n через нерівність).

- **Розв'язування проблем:** Здатність перетворити текстову проблему окупності інвестицій на математичну модель (квадратну нерівність), що вимагає виходу за межі стандартних формул послідовностей.

Розв'язання

1. Модель А: різниця прибутку та формула

У моделі А прибуток зростає на сталу суму щомісяця, що відповідає арифметичній прогресії.

$$a_2 = 3200 \text{ грн (прибуток за 2-й місяць)}$$

$$a_5 = 5000 \text{ грн (прибуток за 5-й місяць)}$$

Крок 1: Знаходимо різницю (d)

Використовуємо формулу n -го члена: $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Для 5-го місяця: $a_5 = a_2 + 3d$.

$$5000 = 3200 + 3d \Rightarrow 3d = 1800 \Rightarrow d = 600 \text{ грн}$$

Крок 2: Формула для n -го місяця

Знаючи, що $a_1 = 2600$ (за умовою):

$$a_n = 2600 + (n - 1) \cdot 600 \Rightarrow a_n = 2000 + 600n$$

2. Прибуток за 10-й місяць (модель А)

Підставляємо $n = 10$ у знайдену формулу:

$$a_{10} = 2600 + (10 - 1) \cdot 600$$

$$a_{10} = 2600 + 9 \cdot 600 = 2600 + 5400 = 8000 \text{ грн}$$

3. Модель Б: відсоток зростання та прибуток за півроку

У цій моделі прибуток зростає у певну кількість разів, що є геометричною прогресією.

$$b_1 = 3000 \text{ грн, } b_2 = 3300 \text{ грн}$$

Крок 1: Знаменник прогресії (q) та відсоток

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{3300}{3000} = 1,1$$

Це означає, що прибуток щомісяця зростає на **10%**.

Крок 2: Сума за 6 місяців (S_6)

Використовуємо формулу суми геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_6 = \frac{3000 \cdot (1,1^6 - 1)}{1,1 - 1} = \frac{3000 \cdot (1,771561 - 1)}{0,1} = 30000 \cdot 0,771561 = 23146,83 \text{ грн}$$

4. Термін окупності (модель А)

Клієнт інвестував 10 000 USD. За курсом 40 грн/USD загальна сума інвестицій становить: $10000 \cdot 40 = 400\,000$ грн

Нам потрібно знайти мінімальне n , при якому сума арифметичної прогресії

$$S_n \geq 400\,000.$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$$

$$400000 = \frac{2 \cdot 2600 + (n-1) \cdot 600}{2} \cdot n$$

$$400000 = 2300n + 300n^2$$

Поділимо на 100 для спрощення:

$$3n^2 + 23n - 4000 = 0$$

Розв'яжемо квадратне рівняння через дискримінант:

$$D = 23^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4000) = 529 + 48000 = 48529$$

$$\sqrt{D} \approx 220,29$$

$$n = \frac{-23 + 220,29}{2 \cdot 3} \approx \frac{197,29}{6} \approx 32,88$$

Оскільки n має бути цілим числом, округлюємо в більшу сторону.

Відповідь: Клієнт повністю окупить інвестицію за **33 місяці**.

Орієнтовні критерії оцінювання

Рівень	Бали	МАО 1: Дослідження та виокремлення проблем	МАО 2: Моделювання та розв'язання	МАО 3: Критичне оцінювання результату
Початковий	1–3	Розпізнає дані (прибуток, суми), але не може пов'язати їх з типом прогресії.	Записує окремі числа; намагається виконати прості дії, але без логічної структури.	Констатує отримання якогось результату без спроби перевірки чи аналізу.
Середній	4–6	Розуміє різницю між моделями А і Б. Виокремлює основні змінні (a_1 , a_n , b_1 , q).	Застосовує базові формули з помилками в обчисленнях. Знаходить різницю d та відсоток q .	Оцінює результат як «правильний / неправильний» за підказкою вчителя.
Достатній	7–9	Самостійно виокремлює математичні параметри задачі. Переводить суму інвестиції в гривні.	Правильно складає математичні моделі (рівняння). Обчислює прибуток за 10-й місяць та суму за 6 місяців.	Порівнює отримані результати з реальними умовами (наприклад, термін окупності в місяцях).
Високий	10–12	Аналізує умови, бачить зв'язки між різними типами прогресій. Точно визначає стратегію пошуку n .	Безпомилково розв'язує квадратне рівняння для окупності. Формулює висновки на основі розрахунків.	Обґрунтовує вибір цілого числа для окупності (округлення до більшого). Робить критичний висновок про вигідність моделей.

Можливі варіанти диференціації

Охоплюють зміст, процес і результат, дозволяючи адаптувати її для учнів з різним рівнем підготовки та стилем навчання.

Диференціація за змістом (Що вивчаємо?)

Цей варіант адаптує самі дані або складність математичних об'єктів.

1. Спрощення числових даних:

- Для слабших учнів: використовувати простіші числа для арифметичної прогресії (наприклад, $d = 100$) або геометричної ($q=1,5$), щоб уникнути складних обчислень із десятковими дробами, особливо в завданні 3 (S_6).

- Для сильніших учнів: ввести нецілочисельні або від'ємні значення, наприклад, прибуток зростає на $1,25\%$, що ускладнить розрахунок q та S_n .

2. Виключення надлишкових даних:

- Для слабших учнів: заздалегідь прибрати деякі надлишкові дані, наприклад, інформацію про $a_1 = 2600$ грн або 245 встановлених СЕС, щоб фокусувати увагу лише на необхідних для розв'язку елементах.

3. Зміна типу прогресії

- Для сильніших учнів (завдання 4): попросити розрахувати окупність інвестиції, обравши модель Б (геометричну прогресію), що вимагає розв'язання експоненціальної нерівності або використання логарифмів (або ітераційного підбору), виходячи за межі стандартної шкільної програми 9 класу.

Диференціація за процесом (Як працюємо?)

Цей варіант адаптує спосіб виконання завдань, забезпечуючи різну підтримку.

1. Різна ступінь підтримки (сходинки допомоги):

Для слабших учнів: надати алгоритм-підказку:

Крок 1: Знайдіть d за формулою $a_n - a_k = d(n-k)$.

Крок 2: Знайдіть a_1 .

Крок 3: Переведіть USD у грн.

Крок 4: Запишіть формулу суми S_n і складіть нерівність.

Для сильніших учнів: запропонувати самостійно сформулювати алгоритм розв'язання завдання 4.

2. Групова робота:

Гетерогенні групи: сформувати групи, де учні з різними рівнями підготовки допомагають одне одному. Сильний учень може пояснити, як розв'язати квадратну нерівність (завдання 4), а учень із середнім рівнем — виконати розрахунок S_6 (завдання 3).

3. Використання інструментів:

Для слабших учнів: дозволити використання електронних таблиць (Excel/Google Sheets) для швидкого обчислення S_n у геометричній прогресії, щоб фокус був на розумінні формули, а не на рутинних обчисленнях.

Диференціація за результатом (Що отримуємо?)

Цей варіант адаптує форму подання кінцевого продукту.

1. Обов'язковий та додатковий результат:

- **Обов'язковий результат:** усі учні мають розв'язати завдання 1 і 2, демонструючи розуміння формул арифметичної прогресії.

- **Додатковий результат:** учні, які швидко виконали обов'язкову частину, мають:

- **Створити** візуалізацію (графік) прибутку для **моделі А** та **моделі Б** за 10 місяців і порівняти їх.

- **Написати** коротке резюме для «клієнта», аргументуючи, яку модель варто обрати, виходячи з мінімізації часу окупності.

2. Формат подання:

- Один учень може надати розв'язки у формі традиційного письмового звіту.

- Інший може представити розв'язок на інтерактивній дошці або у вигляді презентації, пояснюючи кроки розрахунку.

1.6. Елементи стохастики: логіка випадковості

1.6.1. Цифрова фортеця: аналіз багаторівневого захисту

Авторка: *Лесик Ольга Костянтинівна, вчитель математики Золотоніської гімназії ім. С. Д. Скляренка Золотоніської міської ради Черкаської області*

Місцева громада впроваджує систему електронних щоденників та шкільний сервер для зберігання персональних даних учнів. Оскільки



цифрова безпека є пріоритетом, постає питання: «Наскільки надійним є пароль і чи варто витрачати ресурси на двофакторну автентифікацію (2FA)?»

Фахівці з кібербезпеки стверджують, що будь-який захист має свою ймовірність «пробиття». Для аналізу надійності системи вони

запропонували стохастичну модель, де кожен рівень захисту — це незалежна подія. Однак частина даних базується на статистиці зломів, а деякі висновки про доцільність оновлення системи вам доведеться зробити самостійно. Ви — команда учнів-аналітиків, які консультують громаду. Від вашого математичного обґрунтування залежить безпека даних тисяч людей.

Відомо, що:

- ймовірність того, що хакер зможе вгадати або підібрати пароль першого рівня (через простий пароль або фішинг), становить $P(A) = 0,001$;
- ймовірність того, що злоумисник зможе перехопити одноразовий код із SMS (другий рівень захисту) за допомогою дубліката SIM-карти або вразливості мережі, становить $P(B) = 0,05$;
- події зламу першого та другого рівнів є незалежними;
- система вважається «зламаною», якщо подолано обидва бар'єри.

Завдання:

1. Поясніть, чому в даній ситуації для розрахунку загального ризику використовується множення ймовірностей незалежних подій.
2. Заповніть таблицю всіх можливих результатів двоетапної перевірки

№	Злам пароля (A)	Перехоплення sms (B)	Ймовірність події	Стан системи
1	Так	Так		
2	Так	Ні		
3	Ні	Ні		

3. Обчисліть ймовірності таких сценаріїв: «повний злам» (хакер пройшов обидва рівні), «частковий прорив» (хакер дізнався пароль, але зупинився на SMS-коді) або навпаки, «абсолютна безпека» (зловмисник не вгадав навіть пароль). Визначте ймовірність події «Дані врятовані» (хоча б один рівень захисту спрацював).

4. Побудуйте діаграму. На основі таблиці створіть кругову діаграму, яка відображатиме варіант повного зламу, часткового подолання одного рівня, повного захисту.

5. Зробіть висновок для громади у скільки разів встановлення другого рівня (SMS) знижує ризик зламу порівняно зі звичайним паролем? Чи доцільно переходити на додатки-автентифікатори (наприклад, Google Authenticator), якщо ймовірність перехоплення коду в них падає до 0,001?

6. (Додатково) Запропонуйте, як зміниться модель, якщо пароль учня є занадто простим («123456») або учень користується відкритими Wi-Fi мережами без VPN.

Методичні рекомендації для вчителя

1. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

Після виконання задачі учень / учениця:

- ✓ моделює ризики, розрізняє залежні та незалежні події в ІТ-контексті;
- ✓ працює з ймовірностями, обчислює ймовірність добутку та суми подій;
- ✓ аналізує дані, інтерпретує надмалі числа (0,00005) та пояснює їхній практичний зміст;
- ✓ використовує цифрові інструменти, а саме може змоделювати ситуацію в Excel або GeoGebra;
- ✓ усвідомлює практичну цінність математики для розв'язання реальних проблем;
- ✓ розвиває відповідальність за прийняті рішення (безпека середовища).

2. Перелік компетентностей, що формуються

- Математична компетентність: обчислення ймовірностей, побудова логічних ланцюжків.
- Інформаційно-цифрова компетентність: розуміння принципів 2FA, SMS-банкінгу та цифрових ключів, використання цифрових інструментів GeoGebra та Excel для побудови й аналізу моделей.
- Фінансова грамотність: оцінка вартості впровадження системи проти потенційних збитків від витоку даних.
- Громадянська компетентність: відповідальне ставлення до персональних даних у громаді.

3. Перелік наскрізних вмінь, що формуються

- Критичне мислення: оцінка реальної, а не уявної безпеки.
- Розв'язування проблем: вибір оптимального методу захисту на основі цифр.

- Навчання впродовж життя: актуалізація знань про кібергігієну.
- Комунікація: пояснення та захист власних висновків у групі.
- Співпраця: робота в парах і малих групах.
- Творчість: візуалізація та інтерпретація реальної ситуації засобами математики.
- Відповідальність: усвідомлення наслідків проєктних рішень для безпеки людей.

4. Мотивація навчальної діяльності

Проблемне запитання: «Чому банки та соцмережі змушують нас вводити коди з SMS, якщо це незручно? Чи справді ці «зайві 10 секунд» роблять ваш акаунт у 20 разів безпечнішим, чи це лише ілюзія?»

Введення SMS-коду — це приклад стохастичної моделі з незалежними подіями, де кожен рівень захисту має власну ймовірність успіху або невдачі зломисника. Додавання другого рівня зменшує загальну ймовірність зламу системи як добуток ймовірностей незалежних подій. Тому навіть невелика додаткова дія реально підвищує безпеку акаунта, і ці «зайві 10 секунд» не ілюзія, а ефективний статистичний захід.

5. Повне розв'язання

Крок 1. Обґрунтування моделі: Події є незалежними, бо знання пароля не допомагає хакеру технічно перехопити SMS-сигнал оператора. Тому використовуємо правило множення: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Крок 2. Ймовірність можливих випадків:

№	Злам пароля (A)	Перехоплення sms (B)	Ймовірність події	Стан системи
1	Так	Так	0,00005	Зламана
2	Так	Ні	0,00095	Частково зламана
3	Ні	Ні	0,94905	Захищена

Крок 3. Розрахунки.

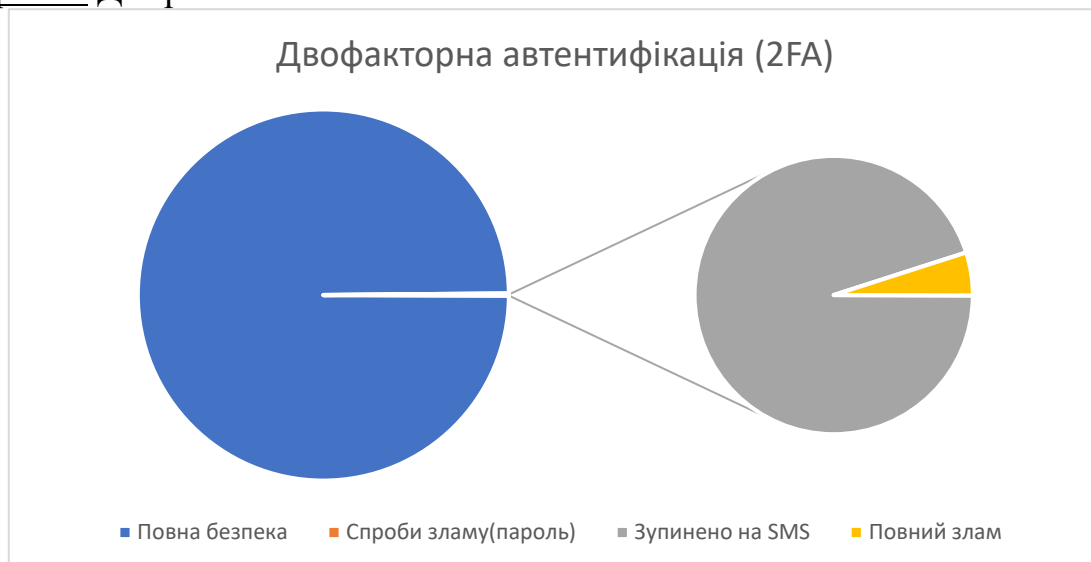
$$P(\text{пароль зламано}) = 0,001 \Rightarrow P(\text{пароль НЕ зламано}) = 1 - 0,001 = 0,999.$$

$$P(\text{sms зламано}) = 0,05 \Rightarrow P(\text{sms НЕ зламано}) = 1 - 0,05 = 0,95.$$

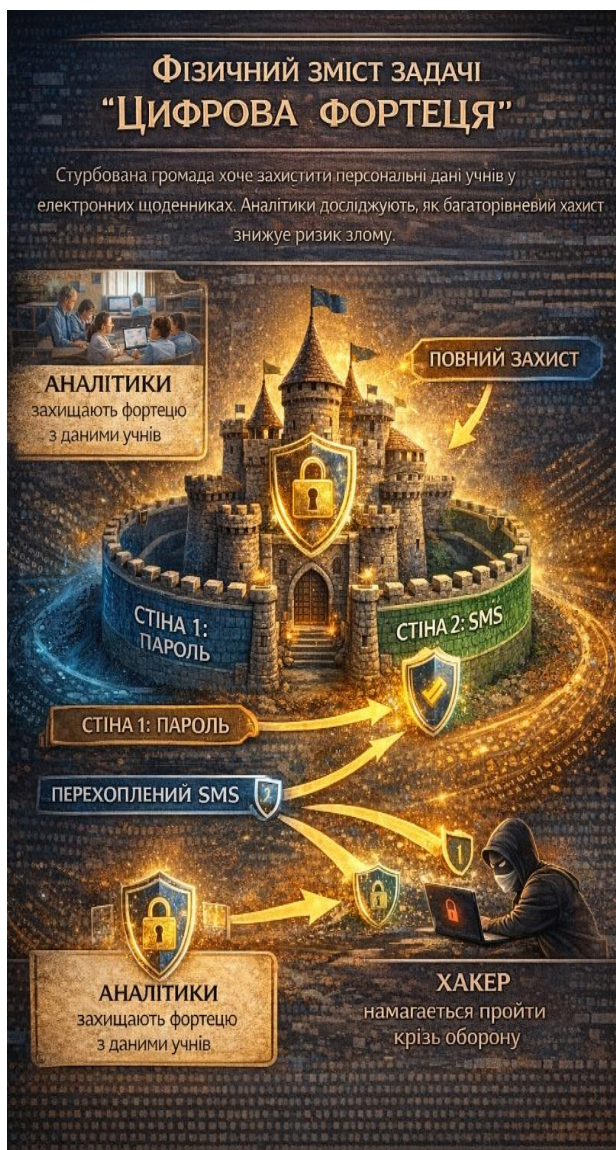
Аналіз результатів:

- 1) Повний злам: $P = 0,001 \cdot 0,05 = 0,00005$ (0,005 %)
- 2) Частковий прорив: $P = 0,001 \cdot (1 - 0,05) = 0,00095$ (пароль підібрано, але доступ НЕ отримано).
- 3) Ймовірність безпеки (хоча б один рівень вистояв): $P(\text{безпека}) = 1 - P(\text{Повний злам}) = 1 - 0,00005 = 0,99995$.

Крок 4. Діаграма



Крок 5. Висновок для громади.



Порівняння: без SMS ризик був 0,001, з SMS він став 0,00005. Ризик зменшився у: $0,001 \div 0,00005 = 20$ разів. Для громади це означає, що замість 10 потенційних зламів на кожен 1000 користувачів, ми отримаємо лише один випадок на 20 000 користувачів.

Додатки-автентифікатори: якщо $P(B)$ стане 0,001, то загальний ризик буде $0,001 \cdot 0,001 = 0,000001$. Це у 50 разів надійніше за SMS-захист і у 1000 разів надійніше за звичайний пароль. Перехід є надзвичайно доцільним, оскільки він практично нівелює загрозу «дублікату SIM-карти» та вразливостей стільникової мережі. Рекомендується для адміністраторів сервера.

Крок 6. Додатково. Якщо користувач ігнорує правила кібергігієни, цифри в моделі змінюються радикально.

Простий пароль («123456»). Зміна в моделі: ймовірність підбору пароля $P(A)$ стрімко зростає. Замість 0,001 вона може сягнути 0,8

(80%), оскільки такі паролі зламуються миттєво методами перебору. Навіть із SMS-захистом загальний ризик становить $0,8 \cdot 0,05 = 0,04$ (4%). Використання слабкого пароля навіть із 2FA у 800 разів небезпечніше, ніж використання складного пароля без 2FA.

Відкритий Wi-Fi без VPN. Зростає ймовірність перехоплення SMS-кодів або сесійних даних користувача. $P(B)$ стає значно вірогіднішою. Також події можуть перестати бути незалежними: хакер, який контролює Wi-Fi мережу, може одночасно перехопити і пароль, і код підтвердження (якщо він передається через інтернет). Модель «множення ймовірностей» перестає працювати, оскільки захист «пробивається» наскрізь.

6. Критерії оцінювання

<i>Рівень / Бали</i>	<i>[MAO 1] Дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів</i>	<i>[MAO 2] Моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язання проблемних ситуацій</i>	<i>[MAO 3] Критичне оцінювання процесу та результату розв'язання проблемних ситуацій</i>
Початковий, 1–3 бали	Розуміє життєву ситуацію частково; потребує постійної допомоги; називає ймовірності, вказані в умові.	За зразком записує окремі елементи моделі без розуміння зв'язків, плутає додавання та множення ймовірностей.	Не може пояснити, чи безпечна система, або робить формальні висновки.
Середній, 4–6 балів	За підказкою визначає проблему та ключові дані; розуміє різницю між успіхом і невдачею.	Складає модель з допомогою вчителя; правильно обчислює ймовірність повного зламу.	Робить короткий висновок («це безпечно»), без обґрунтування.
Достатній, 7–9 балів	Самостійно аналізує ситуацію, коректно формулює математичну проблему без помилок.	Самостійно будує модель, обчислює ймовірність безпеки через протилежну подію.	Оцінює правильність результату, пояснює отримані дані, аргументує перевагу 2FA перед звичайним паролем.
Високий, 10–12 балів	Аналізує вплив зміни вхідних даних (P для додатків), пропонує альтернативні підходи або уточнення проблеми.	Використовує цифрові інструменти для візуалізації малих чисел, оптимізує модель.	Пропонує комплексну стратегію захисту (пароль + додаток), аргументує безпечність рішення.

7. Можливі варіанти диференціації Для учнів, які потребують підтримки:

- працюють із готовою формулою добутку незалежних подій $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$;

- обчислюють ймовірність повного зламу за зразком;

- знаходять протилежну подію за формулою $P(\text{безпека}) = 1 - P(\text{злам})$;

- заповнюють частково готову таблицю результатів (з підказками);

Для більшості учнів:

- самостійно складають повну таблицю всіх можливих комбінацій (3 випадки);

- правильно застосовують правило множення незалежних подій, та формулу протилежної події;

- будують кругову діаграму в Excel / GeoGebra;

Для учнів з високою навчальною мотивацією:

- модифікують модель, змінюють значення $P(A)$ для простого пароля («123456»), аналізують вплив відкритих Wi-Fi мереж (залежність подій);

- розглядають випадок залежних подій (коли фішинг підвищує шанс перехоплення SMS);

- формулюють комплексну стратегію захисту: складний пароль + менеджер паролів + додаток-автентифікатор.

8. Міжпредметна інтеграція

Інформатика: протоколи передачі даних, кібербезпека.

Правознавство: захист персональних даних, цифрові права людини.

Англійська мова: термінологія (Two-factor authentication, phishing, encryption).

Українська мова: формулювання аргументованих висновків, усне та письмове представлення результатів, робота з науково-популярним текстом.

1.6.2. Благодійна лотерея на підтримку ЗСУ

Авторка: *Лесик Ольга Костянтинівна, вчитель математики Золотоніської гімназії ім. С. Д. Скляренка Золотоніської міської ради Черкаської області*

Громада міста організовує благодійну лотерею для збору коштів на потреби військових (закупівля аптечок та спорядження для підрозділів ЗСУ).



Організатори прагнуть зробити лотерею одночасно прибутковою для збору коштів і привабливою для учасників. Після обговорення було ухвалено такі умови: надруковано 500 квитків, вартість одного квитка — 100 грн., призовий фонд становить 20 призів по 200

грн., 5 призів по 500 грн, 1 головний приз — 5000 грн. Витрати на організацію (друк квитків, реклама, логістика) становлять 4000 грн.

Усі кошти, що залишаються після виплати призів і покриття витрат, передаються на підтримку ЗСУ.

Математична модель. Позначимо: n — кількість проданих квитків, p — ціна одного квитка, $F(n)$ — фінансовий результат збору коштів, E — математичне очікування виграшу для одного учасника. Тоді загальний дохід від продажу квитків: $D = n \cdot p$;

Завдання

- 1) Запропонуй можливі значення випадкової величини X — виграш одного учасника лотереї при умові купівлі 1 квитка.
- 2) Поясни, чому подія «виграти приз» є випадковою, та визнач, який тип ймовірності використовується в цій задачі (класичне означення).
- 3) Визнач ймовірність виграшу будь-якого призу, виграшу головного призу, програшу, ймовірність того, що з трьох куплених квитків: жоден не виграє; хоча б один виграє.
- 4) Побудуй таблицю розподілу випадкової величини X (виграш учасника) із зазначенням відповідних ймовірностей, та кругову або стовпчасту діаграму розподілу ймовірностей виграшів.
- 5) Знайди очікуваний фінансовий результат для організаторів (за умови продажу всіх квитків).
- 6) Знайди ймовірність для кількох квитків придбаних однією людиною.

7) Зроби висновок, чи вигідна участь у лотереї з точки зору математики, та чому люди все одно беруть участь у благодійних лотереях?

Методичні рекомендації для вчителя

1. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

Учень / учениця:

- розпізнає ситуації з реального життя, що моделюються ймовірнісними процесами;
- застосовує класичне означення ймовірності;
- розрізняє випадкову подію та випадкову величину;
- обчислює математичне очікування;
- інтерпретує результат у практичному (економічному) контексті;
- робить обґрунтовані висновки щодо доцільності участі в лотереї.

2. Перелік компетентностей, що формуються

- ✓ Математична компетентність: обчислення ймовірностей, складання розподілу, знаходження математичного очікування.
- ✓ Фінансова грамотність: оцінка ризику, аналіз вигоди та збитків, розуміння поняття «очікуваний прибуток».
- ✓ Громадянська компетентність: усвідомлення соціальної цінності благодійних ініціатив.
- ✓ Ініціативність і підприємливість: аналіз ефективності фінансової моделі, прийняття рішень на основі даних.

3. Перелік наскрізних умінь (soft skills)

- Критичне мислення: аналізує, чи є участь у лотереї фінансово вигідною, порівнює інтуїтивне уявлення про «шанс виграти» з реальними розрахунками, відрізняє емоційне рішення від обґрунтованого математичного висновку;
- Уміння розв'язувати проблеми: переводить життєву ситуацію в математичну модель, визначає випадкову величину та її можливі значення, обирає потрібні формули (ймовірність, математичне очікування), будує послідовний алгоритм розв'язання;
- Дослідницькі навички: аналізує структуру розподілу випадкової величини, працює з таблицями та узагальнює дані, досліджує вплив зміни параметрів (ціна квитка, кількість призів), моделює альтернативні сценарії;
- Комунікативні вміння: формулює математичні міркування усно й письмово, аргументує власний висновок, пояснює значення математичного очікування доступною мовою, презентує результати дослідження;
- Соціальна та громадянська відповідальність: усвідомлює соціальну цінність благодійних ініціатив, аналізує вплив колективних рішень на громаду, розуміє, як математика допомагає приймати прозорі рішення, формує відповідальне ставлення до фінансових операцій;
- Інформаційно-цифрова грамотність: будує діаграми розподілу в Excel або Google Sheets, використовує формули для автоматизації

розрахунків, перевіряє коректність обчислень цифровими засобами, створює візуалізацію даних (кругові або стовпчасті діаграми).

4. Мотивація навчальної діяльності

У громаді організовують благодійну лотерею на підтримку ЗСУ. Кожен квиток коштує 100 грн. Є кілька грошових призів і головний виграш. На перший погляд здається, що це шанс виграти. Але чи вигідно це з точки зору математики?

Проблемне питання: Чи можна зробити умови такими, щоб лотерея залишалась прибутковою для підтримки ЗСУ, але водночас учасники відчували реальну мотивацію брати участь?



5. Повне розв'язання

Крок 1. Аналіз умови

Нехай: надруковано 500 квитків, ціна квитка — 100 грн, призи: 20 призів по 200 грн, 5 призів по 500 грн, 1 приз — 5000 грн.

Загальна кількість виграшних квитків: $20 + 5 + 1 = 26$.

Крок 2. Ймовірність виграшу

Ймовірність виграшу будь-якого призу:

$$P(\text{виграш}) = \frac{26}{500} = 0,052$$

Тобто 5,2%.

Ймовірність виграшу головного призу:

$$P(\text{головний приз}) = \frac{1}{500} = 0,002, (0,2\%)$$

Крок 3. Побудова розподілу випадкової величини

Нехай X — виграш одного учасника. Можливі значення:

<i>Виграш (грн)</i>	<i>Ймовірність</i>
0	$\frac{474}{500} = \frac{237}{250}$
200	$\frac{20}{500} = \frac{1}{25}$
500	$\frac{5}{500} = \frac{1}{100}$
5000	$\frac{1}{500}$

Крок 4. Середнє арифметичне

$$\text{Сер. зн.} = 0 \cdot \frac{474}{500} + 200 \cdot \frac{20}{500} + 500 \cdot \frac{5}{500} + 5000 \cdot \frac{1}{500}$$

$$E(X) = 0 + 8 + 5 + 10 = 23$$

Математичне очікування виграшу — 23 грн. Оскільки квиток коштує 100 грн, середній очікуваний фінансовий результат для учасника: $100 - 23 = 77$ грн збитку (в середньому).

Крок 5. Фінансовий результат для організаторів

Дохід: $500 \times 100 = 50\,000$ грн.

Призовий фонд: $20 \times 200 + 5 \times 500 + 5000 = 4\,000 + 2\,500 + 5\,000 = 11\,500$ грн.

Прибуток до витрат: $50\,000 - 11\,500 = 38\,500$ грн.

Якщо витрати на організацію становлять 4 000 грн: $38\,500 - 4\,000 = 34\,500$ грн. Отже, 34 500 грн передаються на підтримку ЗСУ.

Крок 6. Наприклад, учасник купив 3 квитки. Ймовірність програшу одного квитка – 0,948. Ймовірність програшу всіх трьох квитків: $0,948^3 \approx 0,852$, тобто 85,2 %. Ймовірність хоча б одного виграшу: $1 - 0,852 = 0,148$. Тобто приблизно 14,8%.

Висновок: ймовірність виграшу невелика (5,2%), математичне очікування (26 грн) – менше за ціну квитка (100 грн), з точки зору математики участь не вигідна, з точки зору суспільства — це благодійний внесок із шансом на виграш.

6. Критерії оцінювання

Під час оцінювання варто врахувати не лише правильність обчислення ймовірностей а й знаходження відсоткового очікування, інтерпретацію результату, здатність зробити змістовний висновок.

<i>Рівень / Бали</i>	<i>[МАО 1] Дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів</i>	<i>[МАО 2] Моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язання проблемних ситуацій</i>	<i>[МАО 3] Критичне оцінювання процесу та результату розв'язання проблемних ситуацій</i>
Початковий, 1–3 бали	Впізнає математичну тему, але не може чітко сформулювати проблему або мету задачі	За зразком записує окремі елементи моделі без розуміння зв'язків, з помилками або без пояснень	Не робить висновків або вони не пов'язані з умовою задачі.
Середній, 4–6 балів	Формулює проблему з допомогою вчителя, розуміє, що йдеться про елементи стохастички	Складає модель з допомогою вчителя; правильно знаходить елементи стохастички	Робить простий висновок без аргументації або з неточностями
Достатній, 7–9 балів	Самостійно виокремлює проблему та пояснює, чому її можна розв'язати математично	Самостійно будує модель, розв'язує практичне запитання	Аналізує результат, пояснює його зміст у реальному контексті
Високий, 10–12 балів	Чітко формулює проблему, обґрунтовує вибір математичного методу.	Самостійно та коректно моделює ситуацію, обґрунтовує кожен крок	Критично оцінює результат, робить узагальнений висновок, оцінює доцільність моделі

7. Можливі варіанти диференціації

Для учнів, які потребують чіткого алгоритму (початковий рівень.

- 1) Обчислити ймовірність виграшу.
- 2) Знайти ймовірність головного призу.
- 3) Визначити, чи більше 50% шансів виграти.

Підтримка: готові формули.

Для учнів, які мають середній та достатній рівень

- 1) Скласти таблицю розподілу.
- 2) Знайти середнє значення виграшу .
- 3) Зробити короткий висновок.

Підтримка: нагадування формули ймовірності випадкової події, правила добутку, опорні запитання.

Для учнів, які мають високий рівень

- 1) Знайти мінімальну ціну квитка для беззбитковості.
- 2) Дослідити, як зміниться очікування при зміні кількості призів.
- 3) Побудувати графік залежності прибутку від кількості проданих квитків.
- 4) Проаналізувати соціальну цінність моделі.

8. Міжпредметна інтеграція

Економіка / фінансова грамотність: аналіз прибутку, ризику, середнього доходу.

Громадянська освіта: благодійність, прийняття рішень на основі даних, особиста відповідальність.

Інформатика: побудова діаграм, моделювання у таблицях.

Українська мова: формулювання висновків, пояснення математичних результатів, робота з інфографікою.

1.6.3. Логістика майбутнього: аналіз надійності дронів-доставників

Авторка: *Лесик Ольга Костянтинівна, вчитель математики Золотоніської гімназії ім. С. Д. Скляренка Золотоніської міської ради Черкаської області*

Місцева громада розглядає проєкт запуску дронів для швидкої доставки медикаментів між віддаленими пунктами області. Ви — команда технічних аналітиків, які мають оцінити ефективність роботи акумуляторів та ризики польотів. Від вашого аналізу статистичних даних залежить, чи буде цей проєкт безпечним та економічно вигідним.



Відомо, що: протягом випробувального тижня було зафіксовано тривалість польоту дрона (у хвиликах) на одному заряді: 42, 38, 45, 40, 42, 35, 50;

за даними виробника, ймовірність того, що дрон успішно виконає місію при сильному вітрі, становить $P(\text{успіху}) = 0,7$;

рейс вважається «стабільним», якщо тривалість польоту не менша за медіанне значення отриманої вибірки.

Завдання:

1. Поясніть, чому для планування логістики недостатньо знати лише максимальний час польоту, а важливо використовувати статистичні міри.
2. Проведіть статистичну обробку: побудуйте варіаційний ряд та знайдіть моду, медіану та середнє значення вибірки.
3. Побудуйте графічну модель: створіть полігон частот для тривалості польотів.
4. Оцініть стабільність системи: обчисліть розмах вибірки та проаналізуйте, як вплине на середнє значення «викид» у 10 хвилин (технічний збій).
5. Побудуйте ймовірнісну модель: використовуючи ймовірність випадкової події знайдіть ймовірність того, що дрон успішно виконає два послідовні рейси при вітрі.
6. Зробіть висновок для громади: Який «безпечний час» польоту варто закладати в графік доставок? Чи доцільно запускати дрони за умови зниження ймовірності успіху нижче 0,5?

Методичні рекомендації для вчителя

Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

Після виконання задачі учень / учениця:

- Моделює реальні ситуації за допомогою статистичних рядів та ймовірностей випадкових подій.
- Обчислює основні характеристики вибірки (середнє, мода, медіана, розмах).
- Аналізує стійкість статистичних показників до екстремальних значень («викидів»).
- Інтерпретує отримані числа як рівень ризику або ефективності в реальному житті.

Перелік компетентностей, що формуються

- ✓ Математична компетентність: уміння обробляти статистичну інформацію, будувати варіаційний ряд та аналізувати структуру вибірки, розуміння випадкових величин, статистичних характеристик (мода, медіана, середнє арифметичне).
- ✓ Інформаційно-цифрова: візуалізація даних, використання електронних таблиць (Excel / Google Sheets) для обчислень, автоматизація розрахунку середнього значення, медіани, розмаху, побудова графіків (полігон частот), моделювання зміни параметрів (додавання «викиду»), аналізує статистичні дані за допомогою цифрових інструментів, використання цифрових інструментів для аналізу.
- ✓ Компетентності в природничих науках і технологіях (STEM): розуміння технічних характеристик акумуляторів та вплив погодних умов, аналіз надійності технічної системи, оцінка ризиків виконання місії, вміння пов'язувати статистичні дані з реальними інженерними процесами.
- ✓ Підприємливість: оцінка ризиків логістичного проєкту та прийняття рішень на основі даних аналізує ефективність проєкту з точки зору безпеки, та доцільність запуску проєкту за різних умов, прийняття рішення на основі ризику, розгляд альтернативної стратегії (резервні акумулятори, обмеження рейсів).
- ✓ Громадянська компетентність: усвідомлення соціальної значущості безпечної доставки медикаментів, розуміння відповідальності за прийняті рішення, аналіз ризиків для громади, прийняття рішення з урахуванням суспільної безпеки.

Перелік наскрізних вмінь, що формуються (soft skills)

- ✓ Критичне мислення: аналіз, чому максимальний час польоту не є показником надійності, порівняння середнього значення та медіани й пояснення їхньої різниці, формулювання висновків.
- ✓ Уміння розв'язувати проблеми: перехід від життєвої ситуації до математичної моделі та назад.
- ✓ Дослідницькі вміння: аналіз даних, робота з графіками та діаграмами, пошук оптимального значення.
- ✓ Комунікативні вміння: усне й письмове пояснення міркувань, аргументація результатів.
- ✓ Інформаційно-цифрова грамотність: використання графіків, таблиць, цифрових інструментів для аналізу даних.

Мотивація навчальної діяльності

Уявіть, що від дрона залежить термінова доставка ліків. Якщо ми розрахуємо маршрут за "середнім" показником, а дрон розрядиться раніше — місія провалена. Статистика вчить нас бачити не лише «ідеальний» результат, а й межі помилок.

Проблемне запитання: Чи можна довіряти «середньому арифметичному», коли мова йде про технічну надійність та безпеку громади?

Повне розв'язання

Крок 1. Аналіз тривалості польотів

Маємо вибірку: 42, 38, 45, 40, 42, 35, 50.

Варіаційний ряд: 35, 38, 40, 42, 42, 45, 50.

Міри центральної тенденції:

- Мода: 42 хв (зустрічається двічі).

- Медіана: значення посередині впорядкованого ряду — 42 хв.

- Середнє арифметичне вибірки: $\frac{35+38+40+42 \cdot 2+45+50}{7} = 41,7$ хв.

Крок 2. Аналіз розсіювання та «викидів»

Розмах: $50 - 35 = 15$ хв.

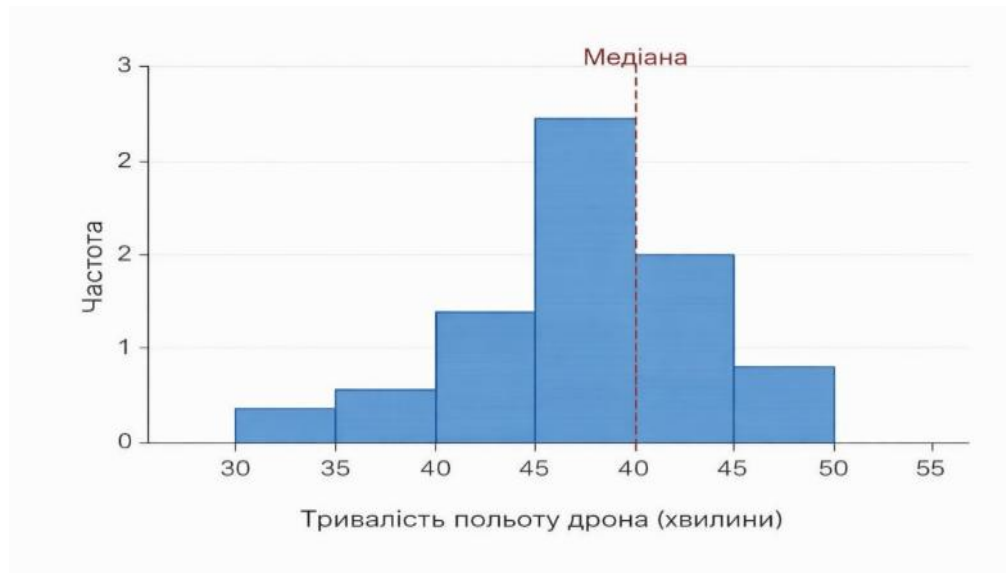
Якщо через збій з'явиться значення 10 хв:

- Нове середнє значення: $\frac{292+10}{8} = 37,75$ хв (зменшилося на 4 хвилини).

- Нова медіана: $\frac{40+42}{2} = 41$ хв. Медіана є більш «стійкою» до аварійних ситуацій (викидів), ніж середнє значення.

Крок 3. Побудова полігону частот

Час (хв)	Частота
35	1
38	1
40	1
42	2
45	1
50	1



Крок 4. Ймовірнісна модель (Польоти при вітрі)

Ймовірність успіху $P(\text{успіху}) = 0,7$, $P(\text{невдачі}) = 0,3$.

Складемо таблицю:

№	1 місія (політ вперед)	2 місія (політ назад)	Ймовірність успішного виконання завдання	Відсоток успішності
1	Успіх	Успіх	0,49	49 %
2	Успіх	Невдача	0,21	21 %
3	Невдача	Успіх	0,21	21 %
4	Невдача	Невдача	0,09	9 %

Результат: Ймовірність успішного виконання обох місій — 0,49 (або 49%).

Крок 5. Підсумковий висновок: мінімальний запас часу має орієнтуватися на нижню межу вибірки (35 хв), але стабільним вважається рейс від 42 хв, запускати дрони при $P < 0,5$ недоцільно, оскільки ймовірність успішної серії рейсів буде стрімко наближатися до нуля, що робить систему економічно збитковою через втрату техніки.

Аналіз надійності медичних дронів: Статистична оцінка для громади

Обґрунтувати безпечність та ефективність використання дронів для доставки медикаментів на основі статистичних даних та розрахунків ймовірності.

Статистика тривалості польотів



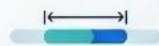
42 хвилини — показник стабільності

Медіана та мода вибірки збігаються, що визначає мінімальний час для естабільного рейсу.

Показник	Значення (хв)
Ряд значень	35, 38, 40, 42, 42, 45, 50
Мода	42
Медіана	42

Середній час польоту — 41.7 хв

Це реальний орієнтир для планування маршрутів між віддаленими пунктами.



Розмах вибірки становить 15 хв
Різниця між 35 та 50 хвилинами вказує на значну мінливість умов польоту.

Оцінка ризиків та ймовірності



49% — ймовірність двох успіхів поспіль

При сильному вітрі шанси успішно виконати дві місії поспіль падають нижче половини.

Вплив збою (викиду) у 10 хв
Технічний збій знижує загальне середнє значення системи з 41.7 до 37.75 хвилин.



Рекомендований «безпечний час»

В графік варто закладати час, не більший за медіану (42 хв), враховуючи похибки.

Критерії оцінювання

Під час оцінювання варто враховувати не лише правильність обчислень, а й уміння учня/учениці пояснювати вибір моделі, інтерпретувати вершину параболи та робити змістовні висновки.

Рівень / Бали	[МАО 1] Дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів	[МАО 2] Моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язання проблемних ситуацій	[МАО 3] Критичне оцінювання процесу та результату розв'язання проблемних ситуацій
Початковий, 1–3 бали	Впізнає математичну тему, але не може чітко сформулювати проблему. Випишує дані без сортування.	За зразком записує окремі елементи моделі без розуміння зв'язків, обчислює лише суму значень.	Не робить висновків або вони не пов'язані з умовою задачі, не може інтерпретувати значення медіани.
Середній, 4–6 балів	Формулює проблему з допомогою вчителя, будує варіаційний ряд, знаходить розмах.	Складає модель з допомогою вчителя; правильно знаходить моду та медіану.	Робить простий висновок про успіх/ невдачу.

Достатній, 7–9 балів	Самостійно виокремлює проблему та пояснює, чому її можна розв'язати математично, обчислює всі міри центральної тенденції.	Самостійно будує модель, розв'язує практичне запитання, знаходить ймовірність випадкових подій.	Аналізує результат, пояснює його зміст у реальному контексті, пояснює різницю між середнім та медіаною.
Високий, 10–12 балів	Чітко формулює проблему, аналізує вплив «викидів» на статистичну модель.	Самостійно та коректно моделює складні події та будує графіки.	Критично оцінює результат, робить узагальнений висновок, обґрунтовує доцільність проєкту на основі ризиків

Можливі варіанти диференціації

Для учнів, які потребують чіткого алгоритму (початковий рівень)

Завдання:

- Записати дані у зростаючому порядку.
- Знайти: мінімальне значення, максимальне значення, розмах вибірки.
- За підказкою знайти медіану.
- Обчислити середнє значення за готовою формулою.

Підтримка:

- ✓ шаблон таблиці;
- ✓ нагадування формули середнього;
- ✓ частково виконаний приклад.

Для учнів, які мають середній та достатній рівень

Завдання:

- Побудувати варіаційний ряд.
- Обчислити ймовірність двох успішних рейсів при $P = 0,7$.
- Побудувати полігон частот.
- Проаналізувати, як зміниться середнє значення при додаванні «викиду» 10 хв.

Підтримка:

- ✓ нагадування правила множення ймовірностей;
- ✓ алгоритм побудови полігону частот.

Для учнів, які мають високий рівень

Завдання:

- Змодельювати ситуацію, коли середній час зменшиться на 5 хв (зношення акумулятора).
- Побудувати прогноз ризиків для 10 послідовних рейсів.
- Оцінити економічну доцільність проєкту, якщо вартість одного рейсу — 1000 грн, збиток при невдачі — 2000 грн.
- Підготувати аналітичний висновок для громади (3–5 аргументованих рекомендацій)

Міжпредметна інтеграція

Фізика та енергетика: аналіз впливу фізичних чинників (вага медикаментів, зустрічний вітер) на статистичну вибірку тривалості польоту,

розрахунок критичного порогу розряду, після якого дрон втрачає стабільність.

Географія та метеорологія: аналіз використання ймовірності $P(\text{успіху})=0,7$ базується на метеорологічних даних Черкащини, дослідження у які місяці ймовірність успішного вильоту вища, аналізу частоти штормових попереджень у регіоні.

Інформатика та ІКТ: побудова полігону частот та розрахунок мір центральної тенденції в MS Excel, Google Sheets або GeoGebra. Використання формул =AVERAGE(), =MEDIAN(), =MODE() для автоматизації обробки великих масивів даних польотів.

Економіка та фінансова грамотність: оцінка доцільності проєкту, якщо ймовірність успіху за серію польотів низька ($P=0,49$), це призводить до фінансових втрат (вартість дрона та ліків), статистика допомагає обґрунтувати витрати на дорожчі, але надійніші системи.

Захист України / робототехніка: розуміння того, як статистична стійкість медіани допомагає програмувати автономні повернення дрона на базу при низькому заряді акумулятора.

Українська мова: формулювання чітких, аргументованих висновків на основі математичних доказів, написання офіційного звернення (звіту) до територіальної громади за результатами дослідження.

1.7. Повторення: простір рішень

1.7.1. Освітній стартап «SmartBooks»

Авторка: *Озірська Світлана Іванівна, вчитель математики Золотоніської спеціалізованої школи №2 інформаційних технологій Золотоніської міської ради Черкаської області*

Компанія «SmartBooks» запускає програму оренди електронних підручників для школярів. Вони пропонують дві моделі оплати, щоб зробити сервіс доступним для різних клієнтів.



Модель А (лінійна): щомісячна вартість оренди підручників зростає на одну й ту саму суму. Відомо, що у другий місяць клієнт заплатив 180 грн, а у п'ятий — 360 грн. У перший місяць оренда коштувала 120 грн.

Модель Б (відсоткова): щомісячна вартість оренди зростає на певний відсоток від попереднього місяця. Відомо, що у перший місяць клієнт заплатив 200 грн, а у другий — 220 грн. За рік компанія планує обслужити 1200 учнів.

Завдання

1. Визначте щомісячну різницю вартості оренди для **моделі А** та запишіть формулу для обчислення ціни за будь-який n -й місяць.
2. Обчисліть, скільки коштуватиме оренда за 9-й місяць за **моделлю А**.
3. Якщо клієнт обирає **модель Б**, то на скільки відсотків зростає ціна щомісяця? Обчисліть загальну суму витрат за перші 6 місяців.
4. Визначте, за який мінімальний час (ціла кількість місяців) витрати клієнта перевищать 5000 грн, якщо він користується **моделлю А**.

Методичні рекомендації для вчителя

- ✓ очікувані результати навчання
- ✓ компетентності й наскрізні вміння
- ✓ повне розв'язання задачі
- ✓ критерії оцінювання
- ✓ варіанти диференціації

Очікувані результати навчання

Предметна компетентність (математична)

Учень/учениця пояснює зміст понять **арифметична та геометрична прогресія** та застосовує відповідні формули для розв'язування практичних задач фінансового змісту.

- **Знає** означення арифметичної та геометричної прогресій, формули **n -го члена** та **суми перших n членів** прогресій.
- **Знаходить** різницю **d** арифметичної прогресії на основі заданих членів та визначає **знаменник q** геометричної прогресії за відомими значеннями послідовних платежів.
- **Моделює** реальні фінансові ситуації (щомісячна оренда, лінійне та відсоткове зростання вартості) за допомогою числових послідовностей.
- **Виконує** обчислення, пов'язані з відсотковим зростанням вартості послуг, та визначає сумарні витрати клієнта за певний період.

Ключові компетентності

1. Фінансова грамотність та підприємливість

- **Аналізує** дві моделі оплати оренди (лінійну та відсоткову) з точки зору вигідності для клієнта та компанії.
- **Оцінює** економічні наслідки вибору моделі оплати для окремого користувача та для компанії з урахуванням кількості учнів.

2. Інформаційно-комунікаційна компетентність (ІКТ)

- **Опрацьовує** умову задачі, виокремлюючи числові дані, необхідні для побудови математичної моделі (вартість оренди, місяць, тип зростання).
- **Використовує** калькулятор або електронні таблиці для виконання обчислень, пов'язаних з відсотковим зростанням та підрахунком загальної суми платежів.

3. Математична компетентність у повсякденному житті

- **Застосовує** математичні знання для аналізу реальних життєвих ситуацій, пов'язаних з оплатою послуг.
- **Інтерпретує** числові результати у практичному контексті (витрати одного клієнта, прибуток компанії).

4. Уміння навчатися впродовж життя

- **Класифікує** умови задачі та самостійно визначає, яку модель (арифметичну чи геометричну прогресію) доцільно застосувати залежно від характеру зростання.
- **Застосовує** набуті знання для розв'язання нових практично орієнтованих задач.

Наскрізні вміння

- **Читання з розумінням:** Здатність точно інтерпретувати текст задачі, визначаючи ключові числові дані та їхню роль у математичній моделі (перший член, різниця, знаменник, кількість місяців, кількість клієнтів).
- **Логічне обґрунтування:** Здатність послідовно й аргументовано пояснювати етапи розв'язання задачі (визначення типу прогресії, знаходження параметрів, обчислення вартості та формулювання висновків).

- **Розв'язування проблем:** Здатність інтерпретувати реальну життєву ситуацію як математичну задачу, визначати тип математичної моделі (лінійна або відсоткова залежність), складати відповідні вирази та рівняння, аналізувати результати та робити обґрунтовані висновки.

Розв'язання

Модель А (арифметична прогресія)

Дано: $a_1 = 120$ грн

$a_2 = 180$ грн

$a_5 = 360$ грн

Знайдемо різницю: $d = a_2 - a_1 = 180 - 120 = 60$ грн

Перевірка:

$$a_5 = a_1 + 4d = 120 + 4 \cdot 60 = 360$$

($a_5 = 360$ є надлишковими даними, але підтверджує розрахунки)

Вартість за 9-й місяць

Потрібно знайти a_9

Підставляємо у формулу:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$a_9 = 120 + 60 \cdot 8 = 120 + 480 = 600 \text{ грн}$$

Модель Б (геометрична прогресія)

Дано: $b_1 = 200$ грн, $b_2 = 220$ грн

Знаходимо знаменник:

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{220}{200} = 1,1$$

Відсоток зростання $q = 1 + r$. $r = (1,1 - 1) \cdot 100\% = 10\%$

Отже, щомісячне зростання становить **10%**.

Доходи компанії за рік (1200 учнів)

(може бути запропоновано як завдання підвищеної складності)

Учні використовують формулу суми геометричної прогресії:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 200 \cdot \frac{1,1^6 - 1}{0,1}$$

$$1,1^6 = 1,771561 \Rightarrow S_6 = 200 \cdot 7,71561 = 1543,122 \text{ грн}$$

Коли витрати за моделлю А перевищать 5000 грн

Мінімальна кількість місяців

Сума за n місяців (арифметична прогресія):

$$S_n = \frac{(2a_1 + (n - 1)d)}{2} \cdot n = \frac{(240 + 60(n - 1))}{2} \cdot n = 30n(n + 3)$$

Потрібно розв'язати нерівність:

$$30n(n + 3) > 5000 \text{ поділимо на } 10$$

$$\Rightarrow 3n(n + 3) - 500 > 0$$

Розв'яжемо квадратне рівняння: $3n^2 + 9n - 500 = 0$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 11,4$$

Висновок: мінімально потрібно **12** місяців

Орієнтовні критерії оцінювання

<i>Завдання</i>	<i>Бали</i>	<i>Критерій оцінювання</i>
Визначення різниці вартості та формули n-го місяця (модель А)	1	Різниця: правильно знайдена різниця арифметичної прогресії $d = 60$ грн
	1	Перший місяць: правильно визначений перший член прогресії $a_1 = 120$ грн
	1	Формула: правильно сформульована загальна формула $a_n = 120 + 60(n - 1)$
	Максимум: 3 бали	
Обчислення вартості за 9-й місяць (модель А)	1	Формула: записано вираз для a_9
	1	Підстановка: правильно підставлені значення $a_9 = 120 + 60 \cdot 8$
	1	Обчислення: правильно виконані обчислення, відповідь $a_9 = 600$ грн
	Максимум: 3 бали	
Визначення відсотка зростання та суми за 6 місяців (модель Б)	1	Знаменник: правильно визначений знаменник геометричної прогресії $q = 1,1$ та відсоток зростання 10%
	1	Формула суми: записана формула $S_n = v_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ та підставлено S_6
	1	Обчислення: правильно виконані обчислення, відповідь $S_6 \approx 1543,12$ грн
	Максимум: 3 бали	
Мінімальний час, коли витрати перевищать 5000 грн (модель А)	1	Формула суми: правильно записано суму арифметичної прогресії $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$ та спрощено до $S_n = 30n(n + 3)$
	1	Нерівність: правильно складено нерівність $30n(n + 3) > 5000$ та спрощено $3n(n + 3) > 500$
	1	Відповідь: правильно знайдено мінімальне ціле $n = 12$ місяців
	Максимум: 3 бали	

Можливі варіанти диференціації

- **За змістом:** спростити числа (наприклад, $d=50$, $q=1,2$) або ускладнити (нецілі відсотки).
- **За процесом:** надати алгоритм-підказку слабшим учням, сильнішим — самостійне формулювання.
- **За результатом:** обов'язкове виконання завдань 1–2, додаткове — побудова графіка витрат за двома моделями та написання рекомендації «яку модель обрати».

Диференціація за змістом (Що вивчаємо?)

- **Спрощення числових даних**

Для слабших учнів:

Арифметична прогресія: задати $d = 50$ або $d = 100$, зберігаючи логіку задачі (наприклад, $a_1 = 120$, $a_2 = 170$, $a_5 = 320$).

Геометрична прогресія: задати $q = 1,5$ або $q = 1,2$ (наприклад, $a_1 = 200$, $a_2 = 240$), щоб уникнути складних десяткових обчислень у S_6 .

Для сильніших учнів:

Арифметична прогресія: використати дробові або від'ємні d (наприклад, тимчасова знижка: $d = -15$).

Геометрична прогресія: задати зростання на 1,25% ($q = 1,0125$) або змінний відсоток (наприклад, перші 3 місяці $q = 1,1$, далі $q = 1,05$).

- **Виключення надлишкових даних**

Для слабших учнів: залишити лише ключові параметри для кожної моделі (наприклад, для А— a_1 , a_2 ; для Б— a_1 , a_2), прибрати річний план 1200 учнів, якщо він не використовується в обчисленнях.

Для сильніших учнів: додати контекстні дані (наприклад, бюджет родини, ліміт витрат), щоб самостійно визначити релевантні змінні.

- **Зміна типу прогресії**

Для сильніших учнів (завдання 4): запропонувати альтернативу— перевірити поріг 5000 грн для моделі Б (геометрична прогресія), розв'язавши експоненційну нерівність або застосувавши логарифми/ітераційний підбір.

Диференціація за процесом (Як працюємо?)

- **Різна ступінь підтримки (сходінки допомоги)**

Для слабших учнів: надати покроковий алгоритм:

1. Знайдіть різницю d за формулою

$$a_n - a_k = d(n - k)$$

2. Запишіть формулу a_n для моделі А:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

3. Знайдіть коефіцієнт q для моделі Б:

$$q = \frac{B_2}{B_1}$$

4. Обчисліть суму S_n для моделі Б:

$$S_n = B_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

5. Складіть нерівність для порога витрат у моделі А:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) > 5000$$

Для сильніших учнів: запропонувати самостійно сформулювати алгоритм для завдання 4 (включно з перевіркою граничних значень і обґрунтуванням вибору методу).

Групова робота

Гетерогенні групи:

Сильний учень: пояснює розв’язання нерівності для суми арифметичної прогресії та/або експоненційну нерівність для моделі Б.

Середній рівень: виконує обчислення S_6 для моделі Б та a_9 для моделі А.

Початковий рівень: перевіряє підстановки у формули, рахує d і q , оформлює проміжні кроки.

Використання інструментів

Для слабших учнів: дозволити Excel/Google Sheets для обчислення S_n у геометричній прогресії та побудови графіків цін за місяцями.

Для сильніших учнів: виконати розрахунки вручну, а інструменти використати для валідації та аналізу чутливості (як змінюється сума при зміні q на $\pm 0,01$).

Диференціація за результатом (Що отримуємо?)

Обов’язковий та додатковий результат

Обов’язковий результат:

Завдання 1: знайти d і записати формулу a_n для моделі А.

Завдання 2: обчислити a_9 для моделі А.

Додатковий результат:

Завдання 3: знайти відсоток зростання для моделі Б та обчислити S_6 .

Аналітика: побудувати графіки цін за 10 місяців для моделей А і Б та порівняти їх.

Комунікація: написати коротке резюме для “клієнта” з рекомендацією моделі з огляду на швидкість досягнення порога витрат (або економію в перші місяці).

Формат подання

Письмовий звіт: розв’язки з формулами та перевіркою.

Презентація/інтерактивна дошка: покрокові пояснення з графіками та висновками.

Візуалізація: окремий аркуш/слайд із порівняльними графіками та короткими інсайтами (де модель А вигідніша, де Б—швидше зростає).

1.7.2. Планування навчальної екскурсії

Авторка: *Лискова Світлана Миколаївна, вчитель математики Золотоніської спеціалізованої школи №2 інформаційних технологій Золотоніської міської ради Черкаської області*

Фабула (проблемна ситуація)

Учні 9 класу планують одноденну навчальну екскурсію до природничого парку. Під час підготовки потрібно визначити, чи вистачить

коштів, часу та транспорту, щоб організувати поїздку для всього класу.

Відомо, що в класі 28 учнів і 2 вчителі. Рада класу отримала кілька пропозицій від туристичних компаній.

Клас має бюджет не більше 6500 грн. Частину коштів зібрали учні, а частину може додати батьківський комітет.

Але деякі дані в пропозиціях неповні або потребують уточнення, тому учням потрібно проаналізувати інформацію, зробити припущення і побудувати математичну модель.



Дані для дослідження

Таблиця 1. Варіанти транспорту

Транспорт	Вартість оренди	Кількість місць	Додаткові умови
Мікроавтобус	2200 грн	18	оплата за весь транспорт
Автобус	3600 грн	35	оплата за весь транспорт
Потяг	110 грн з особи	необмежено	час у дорозі довший

Таблиця 2. Вартість відвідування об'єктів

Об'єкт	Вартість
Екологічна стежка	40 грн/особа
Музей природи	35 грн/особа
Майстер-клас з сортування відходів	600 грн за групу

Таблиця 3. Часова умова
Екскурсія повинна тривати не більше 9 годин.

Дія	Орієнтовний час
Дорога автобусом	1,5 год
Дорога потягом	2,5 год
Екскурсія стежкою	2 год
Музей	1 год
Майстер-клас	1,5 год

ЗАВДАННЯ ДЛЯ УЧНІВ

1. Аналіз ситуації

1. Скільки мінімально місць потрібно у транспорті?
2. Які дані в задачі неповні або приблизні?

2. Складання нерівностей (фінансова грамотність)

Нехай x — додаткова сума від батьківського комітету.

Складіть нерівність, яка описує умову бюджету: $4200 + x \leq 6500$

- Знайдіть можливі значення (x).
- Чи достатньо цих коштів для кожного варіанту транспорту?

3. Вартість поїздки

Складіть нерівність для вартості поїздки, якщо обрано автобус:

$3600 + 75 \cdot 30 + p \leq 6500$, де p — витрати на пальне (400–700 грн).

Проаналізуйте:

- за яких значень p поїздка вкладається в бюджет;
- коли вона стає неможливою.

4. Часова модель

Складіть нерівність для часу екскурсії, якщо обрати потяг: $2 \cdot 2.5 + t \leq 9$, де t — час перебування на локаціях.

Визначте:

- чи можна відвідати усі три об'єкти;
- які комбінації можливі.

5. Графічне дослідження

Побудуйте графік залежності загальної вартості екскурсії від витрат на пальне.

$$y = 5850 + p$$

Дослідіть: при яких значеннях (p) виконується умова ($y \leq 6500$).

6. Прийняття рішення

Працюючи в групах:

1. Запропонуйте оптимальний варіант екскурсії.
2. Обґрунтуйте його математично.
3. Вкажіть, які припущення довелося зробити.

КОМПЕТЕНТНОСТІ, ЩО ФОРМУЮТЬСЯ

Математична компетентність

Учні:

- аналізують реальну життєву ситуацію та виділяють математичну проблему;

- моделюють практичну ситуацію за допомогою нерівностей;
- виконують обчислення та оцінювання результатів;
- інтерпретують розв'язки нерівностей у контексті задачі;
- використовують таблиці, діаграми, графіки для аналізу даних;
- перевіряють реалістичність отриманих результатів;
- обґрунтовують математично прийняте рішення.

Компетентність у галузі природничих наук, техніки та технологій

Учні:

- аналізують інформацію про екологічні об'єкти та природничі локації;
- усвідомлюють значення екологічної освіти та відповідального ставлення до природи;
- досліджують часові та логістичні параметри подорожі;
- застосовують математичні методи для вирішення практичних задач, пов'язаних із транспортом, ресурсами та часом.

Інформаційно-цифрова компетентність

Учні:

- працюють з табличними даними, діаграмами та графіками;
- можуть використовувати цифрові інструменти (наприклад, електронні таблиці, GeoGebra) для:
 - побудови графіків;
 - аналізу залежностей;
 - перевірки результатів;
- здійснюють пошук і критичний аналіз інформації (наприклад, уточнення вартості транспорту або квитків).

Підприємливість та фінансова грамотність

Учні:

- планують бюджет заходу;
- аналізують витрати та можливі джерела фінансування;
- приймають рішення на основі математичних розрахунків та обмежень бюджету;
- оцінюють ризики та альтернативні варіанти (різні види транспорту, додаткові витрати);
- навчаються економічно обґрунтовувати вибір.

Громадянська та соціальна компетентність

Учні:

- працюють у групах, розподіляючи ролі;
- аргументують свою позицію під час обговорення варіантів рішення;
- враховують інтереси всіх учасників поїздки;

- беруть участь у колективному прийнятті рішень;
- розвивають навички комунікації та співпраці.

Екологічна компетентність

Учні:

- усвідомлюють значення екологічної освіти та природоохоронних територій;
- розглядають екологічні аспекти подорожей (відвідування еко-стежки, освітні заходи);
- формують відповідальне ставлення до збереження довкілля.

Уміння вчитися впродовж життя

Учні:

- самостійно планують етапи роботи над задачею;
- визначають якої інформації бракує і шукають її;
- перевіряють правильність своїх розрахунків;
- аналізують помилки та коригують власні дії.

Ініціативність та креативність

Учні:

- пропонують власні варіанти організації екскурсії;
- знаходять альтернативні рішення;
- роблять обґрунтовані припущення щодо відсутніх даних;
- презентують результати дослідження.

Наскрізні вміння, що формуються:

- критичне мислення
- уміння аргументувати
- аналіз інформації
- прийняття рішень
- співпраця в команді
- відповідальність за результат

ОЧІКУВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

МАО 1 — Дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів

- Учень досліджує ситуацію та виділяє основні дані: кількість учасників, види транспорту, бюджет, часові обмеження (МАО 1.1).
- Учень розпізнає надлишкові, неповні або неточні дані і визначає, що потрібно уточнити або оцінити (МАО 1.2).
- Учень формулює математичну проблему з реальної життєвої ситуації (МАО 1.3).

МАО 2 — Моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій та планів дій для розв'язання проблемних ситуацій

- Учень створює математичну модель ситуації, використовуючи нерівності для обмежень бюджету, часу та кількості місць (МАО 2.1).
- Учень аналізує різні варіанти моделі, порівнює можливі рішення і обирає оптимальний варіант (МАО 2.2).

- Учень застосовує цифрові інструменти (таблиці, графіки, GeoGebra) для перевірки та візуалізації результатів (МАО 2.3).

МАО 3 — Критичне оцінювання процесу та результату розв’язання проблемних ситуацій

- Учень оцінює правильність розв’язання та відповідність результату умовам задачі (МАО 3.1).

- Учень аргументовано пояснює вибір оптимального рішення і робить висновки про доцільність кожного варіанту (МАО 3.2).

- Учень розглядає альтернативні сценарії, робить критичний аналіз процесу розв’язання та пропонує власні покращення або доповнення (МАО 3.3).

РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

1. Аналіз умови

Кількість учасників екскурсії: учні — 28, учителі — 2

Разом: $28 + 2 = 30$ осіб

2. Аналіз транспорту

<i>Транспорт</i>	<i>Кількість місць</i>	<i>Чи вистачить місць</i>
Мікроавтобус	18	✗ ні
Автобус	35	✓ так
Потяг	необмежено	✓ так

Висновок:

Мікроавтобус не підходить (не вистачає місць).

Можливі варіанти: автобус або потяг.

3. Бюджет екскурсії

Відомо:

✓ зібрали учні — 4200 грн

✓ батьки — до 2000 грн

✓ екофонд — до 500 грн

Максимальний бюджет: $4200 + 2000 + 500 = 6700$ грн

Але за умовою: бюджет не більше 6500 грн

Тому: $4200 + x \leq 6500$, де x — додаткові кошти. $x \leq 2300$

Висновок: додаткові кошти можуть бути не більше 2300 грн.

4. Вартість відвідування об’єктів

Для 30 осіб:

Екостежка $40 \cdot 30 = 1200$ грн

Музей $35 \cdot 30 = 1050$ грн

Майстер-клас 600 грн

Загальна вартість відвідувань $1200 + 1050 + 600 = 2850$ грн

5. Варіант 1 — Автобус

Вартість автобуса: 3600 грн

Пальне приблизно: 400–700 грн

Загальна вартість $3600 + 2850 + p$, де p — витрати на пальне.

Складемо нерівність бюджету:

$$3600 + 2850 + p \leq 6500$$

$$6450 + p \leq 6500$$

$$p \leq 50$$

Але вартість пального: 400–700 грн.

Висновок: цей варіант не підходить (перевищує бюджет).

6. Варіант 2 — Потяг

Ціна: 110 грн з особи

Для 30 осіб: $110 \cdot 30 = 3300$ грн

Загальна вартість $3300 + 2850 = 6150$ грн

Перевірка бюджету $6150 \leq 6500$

✓ умова виконується.

7. Аналіз часу

Обмеження: не більше 9 годин

Дорога потягом $2.5 \cdot 2 = 5$ год

Відвідування

Об'єкт	Час
екостежка	2 год
музей	1 год
майстер-клас	1,5 год

Разом: $2 + 1 + 1.5 = 4,5$ год

Загальний час $5 + 4.5 = 9,5$ год

✗ перевищує обмеження.

8. Оптимальний варіант

Приберемо **майстер-клас**.

Новий час $2 + 1 = 3$ год

$5 + 3 = 8$ год

✓ умова виконується.

Нова вартість

$1200 + 1050 = 2250$

$3300 + 2250 = 5550$ грн

$5550 \leq 6500$

✓ бюджет також виконується.

9. Остаточне рішення

Оптимальний план екскурсії:

- транспорт — **потяг**
- відвідування:
 - екологічна стежка
 - музей природи

Вартість **5550 грн**

Час **8 годин**

Обидві умови виконуються.

10. Можливі припущення учнів

Учні могли:

- оцінити витрати на пальне;
- уточнити кількість учасників;
- обрати іншу комбінацію локацій;
- запропонувати інший бюджет.

Висновок

Найбільш раціональний варіант — поїздка потягом із відвідуванням екостежки та музею, оскільки він:

- ✓ не перевищує бюджет,
- ✓ вкладається в часові обмеження,
- ✓ підходить для всієї групи.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

<i>Рівень</i>	<i>Бали</i>	<i>МАО 1 Дослідження ситуації</i>	<i>МАО 2 Математичне модельювання</i>	<i>МАО 3 Критичне оцінювання результату</i>
Початковий	1	Учень розпізнає окремі дані задачі, але не розуміє проблеми	Не може скласти математичну модель	Не оцінює результат
	2	Визначає деякі числові дані, але не встановлює зв'язки між ними	З допомогою вчителя записує окремі обчислення	Не пояснює отриманий результат
	3	Частково розуміє ситуацію, але не може сформулювати математичну проблему	Виконує окремі обчислення без побудови нерівності	Робить неповні або неточні висновки
Середній	4	Визначає основні дані задачі	Складає просту нерівність за зразком	Робить простий висновок
	5	Аналізує умову задачі, але потребує підказки	Складає нерівність для частини задачі	Частково пояснює отриманий результат
	6	Виділяє проблему та необхідні дані	Складає математичну модель з допомогою	Робить висновок щодо можливості розв'язку
Достатній	7	Самостійно аналізує ситуацію та визначає необхідні дані	Складає нерівності для розв'язання задачі	Інтерпретує результат у контексті задачі
	8	Виявляє надлишкові або неповні дані	Правильно будує математичну модель і виконує обчислення	Оцінює правильність результату
	9	Аналізує кілька варіантів вирішення проблеми	Використовує кілька математичних моделей	Робить обґрунтований висновок

Високий	10	Самостійно досліджує ситуацію та формулює проблему	Моделює ситуацію кількома способами	Критично аналізує результати
	11	Визначає відсутні або приблизні дані та робить обґрунтовані припущення	Розробляє оптимальну стратегію розв'язання	Аргументовано пояснює вибір рішення
	12	Комплексно досліджує ситуацію, пропонує альтернативні варіанти	Створює повну математичну модель та оптимальний план	Робить критичні висновки та презентує рішення

МОЖЛИВІ ДИФЕРЕНЦІАЦІЇ

1. Диференціація за змістом

- Деякі учні працюють лише з одним видом транспорту (наприклад, автобус або потяг) та базовими даними про бюджет і час.
- Інша група аналізує кілька варіантів транспорту, враховує додаткові витрати (пальне, харчування, квитки) і робить більш детальні обчислення.
- Учні з високим рівнем підготовки отримують розширені умови: непередбачені витрати, знижки, альтернативні маршрути, можливість самостійно підбирати комбінації локацій.

2. Диференціація за процесом

- Деякі учні працюють за готовим алгоритмом або підказками, покроково виконуючи завдання.
- Інші групи використовують таблиці, схеми та діаграми для структурування даних, працюють у парах або малих групах для спільного аналізу.
- Сильні учні застосовують цифрові інструменти, наприклад електронні таблиці або GeoGebra, для побудови графіків, розрахунків і моделювання різних сценаріїв.

3. Диференціація за результатом

- Учні з базовим рівнем формулюють коротке письмове обґрунтування вибору транспортного засобу та вартості поїздки.
- Інші створюють таблиці витрат і графіки, демонструючи взаємозв'язок бюджету та часу.
- Учні високого рівня готують мініпрезентації або постери/інфографіку, де показують оптимальний варіант екскурсії, порівнюють кілька сценаріїв та аргументують свій вибір.

1.7.3. Шкільна кав'ярня: планування продажів

Авторка: Лискова Світлана Миколаївна, вчитель математики Золотоніської спеціалізованої школи №2 інформаційних технологій Золотоніської міської ради Черкаської області

Учнівська рада планує відкрити невелику **шкільну кав'ярню під час благодійного ярмарку**. Планують продавати два основні напої:

- лимонад
- ягідний смузі

Під час попереднього тестового продажу було зібрано деякі дані. Але частина інформації **виявилася неповною або неточною**, тому учням потрібно її **проаналізувати, уточнити та зробити припущення**.



У звіті організаторів зазначено:

- за один день продано **40 напоїв**;
- загальна виручка становила **860 грн**;
- ціна лимонаду приблизно **20–25 грн**;
- ціна смузі приблизно **25–35 грн**;
- частина даних могла бути записана з помилкою.

Учнів попросили визначити реальну кількість проданих напоїв кожного виду та уточнити їхню ціну.

ДАНІ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

Таблиця спостережень

Напій	Орієнтовна ціна (грн)	Витрати на 1 напій (грн)	Популярність (за опитуванням)
Лимонад	20–25	12	55 %
Смузі	25–35	18	45 %

Завдання для учнів

1. Сформулюйте систему рівнянь, що описує ситуацію (кількість напоїв та загальна виручка).
2. Перевірте, чи можуть ціни з таблиці пояснити отриману виручку.
3. Якщо дані неточні — зробіть припущення щодо реальних цін.
4. Розв'яжіть систему рівнянь і знайдіть:
 - ? кількість проданих лимонадів;
 - ? кількість проданих смузі.

5. Проаналізуйте результати:
✓ чи відповідають вони даним опитування;
✓ чи вигідно змінити ціни.
6. Запропонуйте **оптимальну цінову стратегію** для наступного ярмарку.

ДИФЕРЕНЦІАЦІЯ ЗАВДАННЯ

Рівень 1 (базовий)

Скласти систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 40, \\ 25x + 20y = 860. \end{cases}$$

Розв'язати її методом підстановки або додавання.

Рівень 2 (середній)

- Перевірити кілька можливих варіантів цін (20–25 і 25–35 грн).
- Побудувати графіки двох рівнянь і знайти точку перетину.

Рівень 3 (достатній)

- Проаналізувати прибуток, враховуючи витрати на напої.
- Знайти, який напій приносить більше прибутку.

Рівень 4 (високий / дослідницький)

Створити власну модель продажів:

- змінити ціну;
- спрогнозувати нову виручку;
- побудувати графік залежності прибутку від ціни.

ОЧІКУВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

Після виконання завдання учні зможуть:

- моделювати реальну ситуацію за допомогою системи лінійних рівнянь.
- визначати невідомі величини на основі взаємозв'язків між даними.
- застосовувати різні методи розв'язування систем рівнянь (підстановки, додавання, графічний).
- інтерпретувати розв'язок системи рівнянь у контексті реальної ситуації.
- аналізувати інформацію, подану у вигляді таблиць, діаграм і графіків.
- перевіряти достовірність даних та робити припущення у разі неповної інформації.
- використовувати цифрові інструменти (таблиці, графічні сервіси) для дослідження математичних моделей.

КОМПЕТЕНТНОСТІ, ЩО ФОРМУЮТЬСЯ

Математична компетентність

Учні вчать:

- будувати математичну модель реальної ситуації;
- складати систему рівнянь на основі текстової інформації;
- застосовувати різні методи розв'язування систем рівнянь;

- аналізувати та інтерпретувати отримані результати.

Інформаційно-цифрова компетентність

Учні:

- працюють із таблицями, графіками, діаграмами;
- використовують цифрові інструменти для дослідження математичних моделей;
- аналізують дані з різних джерел.

Підприємницька та фінансова компетентність

Учні:

- аналізують доходи, витрати та прибуток;
- порівнюють різні економічні сценарії;
- оцінюють, як зміна ціни впливає на виручку.

Компетентність у природничих науках, техніці та технологіях

Учні:

- досліджують кількісні залежності між змінними;
- будують та аналізують графічні моделі.

Уміння вчитися впродовж життя

Учні:

- формулюють власні припущення;
- перевіряють гіпотези;
- оцінюють правильність отриманих результатів.

Соціальна та громадянська компетентність

Учні:

- працюють у групах;
- аргументують свою позицію;
- приймають спільні рішення.

Наскрізні вміння, що формуються

- критичне мислення (аналіз неточних даних);
- уміння розв'язувати проблеми;
- уміння працювати з інформацією;
- комунікація та співпраця;
- ініціативність і підприємливість.

Розв'язання задачі «Шкільна кав'ярня: планування продажів»

Введемо змінні

Нехай x — кількість проданих смузі,

y — кількість проданих лимонадів.

Складемо систему рівнянь

Загальна кількість напоїв: $x + y = 40$

Загальна виручка: (ціна смузі — 25 грн, лимонаду — 20 грн)

$$25x + 20y = 860$$

Отримуємо систему:

$$\begin{cases} x + y = 40, \\ 25x + 20y = 860. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему (метод підстановки)

З першого рівняння: $y=40-x$. Підставимо у друге рівняння:

$$25x+20(40-x)=860$$

$$25x+800-20x=860$$

$$5x+800=860$$

$$5x=60$$

$$x=12$$

Отже, продано 12 смузі.

$y=40-x$, $y=40-12$, $y=28$. Отже, продано 28 лимонадів.

Перевірка

Перевіримо виручку: $25 \cdot 12 + 20 \cdot 28 = 300 + 560 = 860$

Умова виконується

Відповідь: продано: 12 смузі; 28 лимонадів

Додатковий аналіз (компетентнісний компонент)

Прибуток

Витрати: лимонад — 12 грн, смузі — 18 грн

Прибуток з одного напою: лимонад: $20-12=8$ грн, смузі: $25-18=7$ грн

Загальний прибуток: лимонад: $28 \cdot 8 = 224$, смузі: $12 \cdot 7 = 84$

Загальний прибуток $224 + 84 = 308$ грн

Висновок

Під час тестового продажу:

- ✓ було продано 28 лимонадів і 12 смузі;
- ✓ загальна виручка становила 860 грн;
- ✓ прибуток склав 308 грн;
- ✓ лимонад виявився більш прибутковим продуктом, тому збільшення його продажів може підвищити прибуток на наступному ярмарку.

Критерії оцінювання (за 12-бальною шкалою)

Рівень	Бали	[МАО 1] Дослідження ситуації та виокремлення проблеми	[МАО 2] Моделювання та розроблення стратегії розв'язання	[МАО 3] Критичне оцінювання процесу та результату
Початковий	1–2	Учень фрагментарно розуміє умову задачі, не може визначити проблему або потребує значної допомоги	Не може скласти математичну модель або допускає суттєві помилки	Не аналізує результат, не перевіряє розв'язання
	3	Учень частково визначає проблему, але не виділяє важливі дані	Прагне скласти модель, але робить суттєві помилки в записі рівнянь	Висновок відсутній або не пов'язаний із задачею
Середній	4	Визначає проблему з допомогою вчителя, частково аналізує дані	Складає математичну модель із помилками	Частково аналізує результат, але не перевіряє правильність

	5	Аналізує частину даних, але не враховує надлишкову або неточну інформацію	Складає систему рівнянь, але допускає помилки у розв'язанні	Робить короткий висновок без обґрунтування
	6	Правильно визначає проблему та більшість необхідних даних	Складає систему рівнянь і намагається її розв'язати	Робить висновок, але недостатньо аналізує результат
Достатній	7	Самостійно визначає проблему та необхідні дані	Правильно складає математичну модель	Аналізує результат і формулює висновок
	8	Аналізує умову, визначає надлишкові або недостатні дані	Правильно розв'язує систему рівнянь одним методом	Перевіряє результат та пояснює його зміст
	9	Повно аналізує ситуацію, виділяє ключові дані	Використовує ефективну стратегію розв'язання	Обґрунтовує отриманий результат
Високий	10	Самостійно аналізує ситуацію, робить припущення щодо відсутніх даних	Будує математичну модель і розв'язує задачу різними способами	Аналізує достовірність результату
	11	Поглиблено досліджує ситуацію та пропонує додаткові способи аналізу	Моделює ситуацію, застосовує різні методи розв'язання	Критично оцінює результат та порівнює можливі варіанти
	12	Глибоко аналізує ситуацію, самостійно формулює проблему та припущення	Створює повну математичну модель і оптимальну стратегію розв'язання	Робить аргументовані висновки, пропонує альтернативні рішення та практичні рекомендації

Пояснення до використання критеріїв

Оцінювання може здійснюватися за трьома складниками:

МАО 1 (аналіз ситуації) – до 4 балів

МАО 2 (математичне моделювання) – до 4 балів

МАО 3 (аналіз результатів) – до 4 балів

Загальна оцінка = сума балів (максимум 12).

МОЖЛИВІ ВАРІАНТИ ДИФЕРЕНЦІАЦІЇ

Диференціація за змістом

Передбачає **різний обсяг і складність навчального матеріалу для учнів.**

<i>Рівень</i>	<i>Варіант завдання</i>
Базовий	Учні отримують частково підготовлену модель задачі: задані змінні та одну частину системи рівнянь. Потрібно скласти друге рівняння і розв'язати систему.
Середній	Учні самостійно формулюють змінні, складають систему рівнянь та знаходять розв'язок.
Достатній	Учні аналізують неповні або надлишкові дані, визначають, які з них необхідні, складають математичну модель і розв'язують задачу.
Високий	Учні додатково досліджують ситуацію: змінюють параметри (наприклад, ціну товару) та прогнозують нові результати.

Диференціація за процесом

Передбачає **різні способи організації роботи та виконання завдання.**

<i>Рівень</i>	<i>Організація роботи</i>
Базовий	Робота в парах із підказками (алгоритм складання системи рівнянь, опорна схема).
Середній	Робота в малих групах (3–4 учні) із розподілом ролей: аналітик, математик, доповідач.
Достатній	Самостійне або групове дослідження із використанням таблиць, графіків, цифрових інструментів.
Високий	Дослідницька робота: учні обирають власний спосіб розв'язання (графічний, алгебраїчний, цифрове моделювання).

Диференціація за результатом

Передбачає **різний рівень складності кінцевого продукту діяльності учнів.**

<i>Рівень</i>	<i>Очікуваний результат</i>
Базовий	Правильно складена система рівнянь і знайдений розв'язок.
Середній	Розв'язок задачі та пояснення отриманого результату.
Достатній	Аналіз отриманого результату та перевірка правильності розв'язання.
Високий	Розширений результат: презентація, побудова графіка, пропозиції щодо оптимізації ситуації (наприклад, збільшення прибутку).

РОЗДІЛ 2. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ВСЕСВІТ: ВІД ПЛОЩИНИ ДО ПРОСТОРУ

*Геометрія — це мистецтво
правильно міркувати про простір
Евклід*



Світ, у якому живуть сучасні підлітки, — це не лише креслення у зошиті. Це світ форм, простору і взаємозв'язків. За даними досліджень OECD (Організація економічного співробітництва та розвитку), саме просторове мислення та вміння інтерпретувати геометричні моделі є важливою складовою компетентностей XXI століття.

Щодня люди, навіть не помічаючи цього, використовують геометрію: орієнтуються в просторі, проєктують будівлі, аналізують маршрути, створюють дизайн, працюють із координатами та моделями. Архітектори розраховують конструкції, інженери будують механізми, програмісти створюють 3D-середовища, а учні — як герої наших задач — шукають відповіді на запитання: «Як це виглядає?», «Як це побудувати?», «Як це працює в просторі?»

Саме тому задачі цього розділу — це не просто вправи. Це моделі реальних ситуацій, у яких геометрія стає інструментом пізнання світу. Тут чотирикутники допомагають описувати об'єкти, трикутники — знаходити невідомі величини, координати — задавати точність, а перетворення — досліджувати рух і зміни.

Кожна задача — це маленьке дослідження:

- спочатку виникає ситуація або просторове завдання;
- далі — його геометрична модель;
- потім — обґрунтоване розв'язання;
- і найголовніше — інтерпретація результату: «Як це працює в реальному житті?»

У матеріалах розділу реалізовано підхід, рекомендований концепцією НУШ: навчання через діяльність, дослідження та практичний контекст. Учень тут не просто будує фігури — він мислить просторово, аналізує, моделює та робить висновки.

Адже головна ідея проста: геометрія — це не лише про фігури. Це про розуміння простору.

Тож запрошуємо до роботи — де кожна задача починається з уяви, а завершується відкриттям.

2.1. Геометричний перезапуск: апгрейд знань 8 класу

2.1.1. Проектування екологічного шкільного дворика

Авторка: *Лискова Світлана Миколаївна, вчитель математики Золотоніської спеціалізованої школи №2 інформаційних технологій Золотоніської міської ради Черкаської області*

Шкільна рада разом з учнями планує облаштувати **екологічний дворик** на території школи. За ескізом, дворик складатиметься з кількох ділянок різної форми (чотирикутників), які виконують різні функції:



- зона відпочинку;
- квітник;
- майданчик для дослідів з біології;
- сонячна міні-електростанція.

Архітектор залишив **неповний та неточний план**, деякі розміри відсутні, а частина даних є надлишковою. Учнім потрібно **дослідити план, уточнити інформацію та обґрунтувати вибір форм ділянок**, використовуючи знання про чотирикутники та їх властивості.

Зона відпочинку
(прямокутник)

Квітник
(ромб)

Сонячна зона
(трапеція)

Завдання (диференціація за рівнями)

Рівень початковий

Визначте **види чотирикутників**, зображених на плані та заповніть таблицю:

Ділянка	Вид чотирикутника	Основні властивості
Квітник		
Зона відпочинку		
Сонячна зона		

Рівень достатній

1. Відомо, що площа зони відпочинку дорівнює 96 м^2 , а одна із сторін прямокутника — 8 м . Знайдіть інші розміри зони відпочинку.

2. Для квітника (ромб). Одна діагональ дорівнює 10 м , а друга діагональ не вказана. Запропонуйте можливі значення другої діагоналі та поясніть, як це вплине на площу.

3. Які надлишкові або відсутні дані ви помітили на плані?

Рівень високий / творчий

1. Сонячна зона має форму трапеції, де одна основа дорівнює 12 м , друга основа невідома, висота — 5 м , площа має бути не меншою за 50 м^2 . Знайдіть можливі значення другої основи.

2. Обґрунтуйте, чому саме трапеція є доцільною формою для сонячних панелей (врахуйте кут падіння сонячних променів — міжпредметний зв'язок з природничими науками).

3. Запропонуйте альтернативну форму однієї з ділянок та поясніть свій вибір з точки зору:

- ✓ геометрії;
- ✓ фінансової доцільності (витрати матеріалів);
- ✓ екології.

Очікувані результати навчання

Відповідно до Державного стандарту базової середньої освіти (математична освітня галузь)

Учень / учениця:

Знання та розуміння

- розпізнає та класифікує чотирикутники (паралелограм, прямокутник, квадрат, ромб, трапеція);
- знає та формулює властивості чотирикутників (паралельність сторін, рівність кутів і сторін, властивості діагоналей);
- розуміє зв'язок між геометричною формою та її практичним призначенням.

Уміння та навички

- застосовує властивості чотирикутників для обчислення площ і лінійних розмірів;
- аналізує ситуації з неповними, надлишковими або неточними даними;
- добирає та використовує математичні моделі для розв'язування прикладних задач;
- працює з кресленнями, схемами, умовними планами;
- аргументує власні рішення, робить висновки.

Ставлення та цінності

- усвідомлює практичну цінність геометрії у повсякденному житті;
- демонструє відповідальне ставлення до використання ресурсів;
- виявляє зацікавленість у дослідницькій та проєктній діяльності.

Предметна компетентність (математична)

Учень/учениця

- **Пояснює** зміст понять «чотирикутник», «паралелограм», «трапеція», «ромб».
- **Знає** властивості чотирикутника, прямокутника, ромба, трапеції.
- **Використовує** властивості чотирикутників для розв'язування задач.
- **Застосовує** формули площ чотирикутників у практичних ситуаціях.
- **Аналізує** та інтерпретують геометричні моделі.

Компетентності, що формуються

Математична компетентність

- уміння застосовувати математичні знання у практичних ситуаціях;
- використання геометричних понять для аналізу реальних об'єктів;
- логічне обґрунтування рішень.

Компетентності в галузі природничих наук, техніки і технологій (STEM)

- розуміння впливу форми об'єкта на його функціональність (сонячні панелі, освітлення);
- інтеграція математичних і природничих знань;
- елементи проєктування.

Екологічна компетентність

- усвідомлення доцільності раціонального використання простору;
- екологічно відповідальні рішення під час планування територій.

Підприємливість і фінансова грамотність

- оцінка витрат матеріалів залежно від геометричної форми;
- прийняття економічно обґрунтованих рішень;
- аналіз доцільності альтернатив.

Інформаційно-комунікаційна компетентність

- використання цифрових інструментів (GeoGebra, онлайн-джерела);
- пошук, аналіз та інтерпретація інформації;
- візуалізація даних.

Уміння вчитися впродовж життя

- самостійне уточнення відсутніх даних;
- планування власної діяльності;
- рефлексія результатів роботи.

Соціальна та громадянська компетентності

- робота в групах;
- обговорення та прийняття спільних рішень;
- відповідальність за спільний результат.

Розв'язання завдання

Рівень 1 (базовий)

Визначення видів чотирикутників

- **Квітник — ромб** (усі сторони рівні, діагоналі перетинаються під прямим кутом)
- **Зона відпочинку — прямокутник** (усі кути прямі, протилежні сторони рівні та паралельні)
- **Сонячна зона — трапеція** (лише одна пара паралельних сторін)

Заповнення таблиці

Ділянка	Вид чотирикутника	Основні властивості
Квітник	Ромб	Усі сторони паралельні і рівні, діагоналі перпендикулярні
Зона відпочинку	Прямокутник	Усі кути 90°, протилежні сторони рівні, діагоналі рівні
Сонячна зона	Трапеція	Одна пара паралельних сторін, сума кутів, що прилягають до бічної сторони 180°

Паралельні сторони

Ромб — 2 пари

Прямокутник — 2 пари

Трапеція — 1 пара

Рівень 2 (достатній)

1. Зона відпочинку (прямокутник)

Площа: $S = 96 \text{ м}^2$

Одна сторона: $a = 8 \text{ м}$

$$b = \frac{S}{a} = \frac{96}{8} = 12 \text{ м}$$

Відповідь: розміри зони — $8 \text{ м} \times 12 \text{ м}$

2. Квітник (ромб)

• Діагональ $d_1 = 10 \text{ м}$

• Діагональ d_2 — невідома

Формула площі ромба: $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

Можливі припущення:

• якщо $d_2 = 6 \text{ м} \rightarrow S = 30 \text{ м}^2$

• якщо $d_2 = 8 \text{ м} \rightarrow S = 40 \text{ м}^2$

Учні роблять висновок: **зміна діагоналі впливає на площу**, а отже — на кількість рослин.

Рівень 3 (високий)

1. Сонячна зона (трапеція)

$a = 12 \text{ м}$

$b = ?$

$h = 5 \text{ м}$

$S = 50 \text{ м}^2$

Формула площі трапеції:

$$S = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

$$S = \frac{(12+b) \cdot 5}{2} \geq 50$$

$$12+b \geq 20 \Rightarrow b \geq 8 \text{ м}$$

Відповідь: друга основа має бути **не меншою за 8 м.**

2. Обґрунтування вибору трапеції

- ✓ ширша основа — більше місця для панелей;
- ✓ форма дозволяє оптимально розмістити панелі під кутом до сонця;
- ✓ менші витрати матеріалів порівняно з прямокутником.

Критерії оцінювання (відповідно до підходів НУШ з орієнтацією на математичні процеси MAO 1–MAO 3 та переведенням у 12-бальну систему).

Таблиця побудована так, щоб учитель міг легко використати її під час оцінювання роботи учнів або груп.

Критерії оцінювання виконання завдання «Екологічний дворик»

<i>Рівень навчальних досягнень</i>	<i>Бали</i>	<i>MAO 1. Дослідження ситуації та виокремлення проблеми</i>	<i>MAO 2. Моделювання ситуації та розроблення стратегії</i>	<i>MAO 3. Критичне оцінювання результату</i>
Початковий	1–3	Учень частково розпізнає чотирикутники на плані. Потребує значної допомоги вчителя.	Виконує лише окремі прості обчислення або заповнює таблицю з підказкою.	Майже не аналізує результат, пояснення відсутні або неправильні.
	1	Не може визначити види чотирикутників.	Не застосовує математичні методи.	Висновки відсутні.
	2	Визначає 1–2 фігури з допомогою.	Виконує окремі дії за зразком.	Пояснення неповні.
	3	Частково заповнює таблицю властивостей.	Робить прості обчислення за підказкою.	Дає короткий, нечіткий висновок.
Середній	4–6	Учень визначає більшість чотирикутників та їх основні властивості. Помічає деякі відсутні або надлишкові дані.	Застосовує відомі формули (площа прямокутника, ромба), частково будує модель задачі.	Робить прості пояснення отриманих результатів.
	4	Правильно визначає частину фігур.	Виконує обчислення з помилками.	Пояснення поверхові.
	5	Визначає більшість фігур і їх властивості.	Розв'язує задачу на площу прямокутника.	Робить короткий висновок.
	6	Визначає всі фігури та основні властивості.	Правильно розв'язує задачі достатнього рівня.	Пояснює отримані результати.

Достатній	7–9	Учень аналізує план, знаходить відсутні або зайві дані, формулює математичну проблему.	Самостійно застосовує формули площ, пропонує кілька можливих значень параметрів (наприклад, діагоналі ромба), будує математичну модель.	Обґрунтовує результати, пояснює їх зв'язок із умовою задачі.
	7	Аналізує ситуацію та визначає проблему.	Правильно виконує більшість обчислень.	Дас аргументоване пояснення.
	8	Виявляє відсутні та надлишкові дані.	Пропонує кілька варіантів розв'язку.	Аналізує правильність результатів.
	9	Повністю досліджує ситуацію.	Самостійно будує модель задачі та обчислює параметри.	Робить обґрунтований висновок.
Високий	10–12	Учень глибоко досліджує проблему, встановлює зв'язки між геометрією та реальним застосуванням.	Створює власну модель або пропонує альтернативну форму ділянки, розробляє стратегію розв'язання та проводить розрахунки.	Критично оцінює отримані результати, аргументує доцільність рішень (геометрично, економічно, екологічно).
	10	Чітко формулює проблему та умови.	Правильно знаходить можливі значення параметрів.	Пояснює практичне значення результату.
	11	Аналізує кілька варіантів розв'язання.	Пропонує альтернативні математичні моделі.	Робить розгорнуте обґрунтування.
	12	Комплексно досліджує ситуацію, враховує міжпредметні зв'язки.	Створює оптимальну модель та пропонує власний варіант планування ділянки.	Дас глибоку аргументацію (математичну, економічну, екологічну).

Як використовувати таблицю:

МАО 1 оцінює здатність учнів аналізувати ситуацію та формулювати проблему.

МАО 2 — математичне моделювання та обчислення.

МАО 3 — аналіз, аргументація та оцінювання результатів.

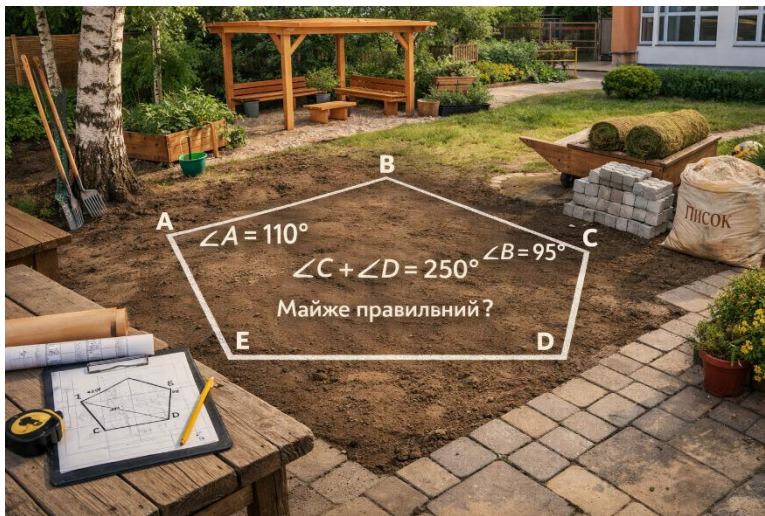
2.1.2. Проектування майданчика для відпочинку

Тема: Многокутник та його властивості

Авторка: *Лискова Світлана Миколаївна, вчитель математики Золотоніської спеціалізованої школи №2 інформаційних технологій Золотоніської міської ради Черкаської області*

Ситуація (фабула)

У школі планують облаштувати майданчик для відпочинку у формі багатокутника.



Дизайнери запропонували ділянку, яка на ескізі має форму п'ятикутника ABCDE.

Відомо, що:

- сторони (AB), (BC), (CD), (DE), (EA) утворюють замкнену фігуру;
- два кути позначені на кресленні: $\angle A = 110^\circ$, $\angle B = 95^\circ$; дизайнер

також записав, що сума двох інших кутів дорівнює 250° ;

- один із кутів (біля вершини D) приблизно на 15° більший за кут C;
- на плані написано, що п'ятикутник «майже правильний», але точних пояснень немає.

При обговоренні проекту виникли питання:

- чи можна визначити всі кути цього п'ятикутника;
- чи справді він близький до правильного;
- чи достатньо наданої інформації для точних розрахунків.

Ваше завдання — проаналізувати інформацію, уточнити дані та зробити обґрунтовані висновки.

Завдання

Рівень 1 (базовий)

1. Визначте суму внутрішніх кутів п'ятикутника.
2. Перевірте, чи узгоджуються подані дані (110° , 95° і сума двох інших 250°) із цією властивістю.
3. Поясніть, які дані в задачі є надлишковими або потребують уточнення.

Рівень 2 (достатній)

1. Позначте кут $C = x$.

2. Використовуючи умову, що $\angle D = x + 15^\circ$, складіть рівняння для знаходження кутів C і D.

3. Знайдіть усі кути п'ятикутника.

Рівень 3 (високий)

1. Порівняйте знайдені кути із кутами правильного п'ятикутника.

2. Зробіть висновок:

✓ чи можна вважати даний п'ятикутник «майже правильним»;

✓ які зміни потрібно внести у кути, щоб він став правильним.

3. Запропонуйте інший можливий варіант кутів, який теж відповідає умовам задачі (або поясніть, чому це неможливо).

Додаткове дослідницьке завдання (STEM-елемент)

Архітектори планують викласти доріжки вздовж сторін п'ятикутника.

1. Намалюйте можливу модель цього п'ятикутника.

2. Перевірте за допомогою креслення або GeoGebra, чи можна побудувати такий п'ятикутник.

3. Поясніть, які труднощі можуть виникнути при реальному будівництві.

Повне розв'язання задачі

1. Знайдемо суму внутрішніх кутів п'ятикутника

Відомо, що сума внутрішніх кутів (n)-кутника обчислюється за формулою:

$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Для п'ятикутника (n=5):

$$S = (5 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S = 3 \cdot 180^\circ$$

$$S = 540^\circ$$

Сума внутрішніх кутів п'ятикутника дорівнює 540° .

2. Перевіримо надані в умові дані

Відомо: $\angle A = 110^\circ$, $\angle B = 95^\circ$

Також зазначено, що $\angle C + \angle D = 250^\circ$

Позначимо $\angle C = x$

Тоді за умовою: $\angle D = x + 15^\circ$

Сума всіх кутів дорівнює 540° :

$$110^\circ + 95^\circ + x + (x + 15^\circ) + \angle E = 540^\circ$$

$$220^\circ + 2x + \angle E = 540^\circ$$

$$2x + \angle E = 320^\circ$$

3. Використаємо умову про суму двох кутів

З умови: $\angle C + \angle D = 250^\circ$

Підставимо:

$$x + (x + 15) = 250$$

$$2x + 15 = 250$$

$$2x = 235$$

$$x = 117,5$$

Отже: $\angle C = 117,5^\circ$ $\angle D = 132,5^\circ$

4. Знайдемо кут (E)

Скористаємося сумою всіх кутів:

$$110^\circ + 95^\circ + 117,5^\circ + 132,5^\circ + \angle E = 540^\circ$$

$$455^\circ + \angle E = 540^\circ$$

$$\angle E = 85^\circ$$

5. Отримані кути п'ятикутника

$$\angle A = 110^\circ, \angle B = 95^\circ, \angle C = 117,5^\circ, \angle D = 132,5^\circ, \angle E = 85^\circ$$

$$\text{Перевірка: } 110^\circ + 95^\circ + 117,5^\circ + 132,5^\circ + 85^\circ = 540^\circ$$

Умова виконується.

6. Порівняємо з правильним п'ятикутником

Кут правильного п'ятикутника:

$$540^\circ : 5 = 108^\circ$$

Порівняємо:

Кут	Значення	Відхилення від 108°
A	110°	$+2^\circ$
B	95°	-13°
C	$117,5^\circ$	$+9,5^\circ$
D	$132,5^\circ$	$+24,5^\circ$
E	85°	-23°

Висновок:

П'ятикутник не є близьким до правильного, оскільки деякі кути відрізняються більш ніж на 20° .

7. Аналіз даних задачі (компетентнісний елемент)

Учні можуть зробити такі висновки:

Неповні дані

- не було прямо задано один із кутів.

Надлишкові або неточні дані

- фраза «майже правильний» є суб'єктивною і не має математичної точності.

Дані, які довелося уточнювати

- співвідношення між кутами C і D.

Математична предметна компетентність

Під час виконання завдання учні:

1. Розпізнають математичну проблему в життєвій ситуації

- аналізують опис реальної ситуації (планування майданчика);
- виокремлюють геометричну модель — **п'ятикутник**;
- визначають, які математичні знання необхідні для розв'язання задачі.

2. Використовують властивості багатокутників

- застосовують формулу суми внутрішніх кутів багатокутника

$$S = (n-2) \cdot 180^\circ$$

- використовують залежності між кутами фігури;
- аналізують співвідношення між кутами.

3. Будують математичну модель ситуації

- вводять змінні для невідомих величин;

- складають рівняння або систему співвідношень;
- використовують математичні методи для знаходження невідомих.

4. Виконують обчислення та перевіряють результати

- знаходять значення невідомих кутів;
- перевіряють відповідність результату властивостям багатокутника;

- контролюють правильність обчислень.

5. Інтерпретують математичний результат

- пояснюють отримані результати у контексті задачі;
- порівнюють отриману фігуру з **правильним п'ятикутником**;
- роблять висновки щодо точності початкових даних.

6. Критично оцінюють математичну інформацію

- виявляють **надлишкові або неточні дані**;
- аналізують достовірність твердження «майже правильний п'ятикутник»;
- аргументують власні висновки.

Очікувані результати навчання відповідно до Державного стандарту базової середньої освіти (НУШ) для 7–9 класів з математичної освітньої галузі, які формуються під час виконання запропонованого завдання.

<i>Очікуваний результат навчання</i>	<i>Як проявляється у завданні</i>
Розпізнає проблемні ситуації, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів	Учень аналізує реальну ситуацію планування майданчика та визначає, що її можна описати за допомогою геометричної моделі — п'ятикутника.
Виокремлює математичні величини, об'єкти та залежності в описаній ситуації	Учень визначає вершини, кути багатокутника, співвідношення між кутами та використовує ці дані для подальших розрахунків.
Створює математичну модель ситуації (схему, рисунок, рівняння тощо)	Учень будує креслення п'ятикутника, вводить змінні для невідомих кутів і складає рівняння.
Застосовує математичні методи та властивості геометричних фігур для розв'язання задач	Учень використовує формулу суми внутрішніх кутів багатокутника, знаходить невідомі кути, виконує обчислення.
Обирає та реалізує стратегію розв'язання задачі	Учень планує послідовність дій: аналіз умови → математична модель → розрахунки → перевірка результату.
Перевіряє правильність отриманого результату	Учень перевіряє, чи дорівнює сума знайдених кутів 540° .
Інтерпретує результат розв'язання у контексті задачі	Учень пояснює, чи відповідає отриманий п'ятикутник твердженню «майже правильний».
Критично оцінює математичну інформацію та робить обґрунтовані висновки	Учень визначає надлишкові або неточні дані задачі та аргументує власні висновки.

Узагальнення

Після виконання завдання учні повинні вміти:

- розпізнавати математичну проблему у реальній ситуації;
- створювати математичну модель геометричної ситуації;
- застосовувати властивості багатокутників для розв'язування задач;
- перевіряти та інтерпретувати отримані результати;
- критично оцінювати дані та формулювати обґрунтовані висновки.

Варіанти диференціації завдання

1. Початковий рівень (відтворення знань)

Завдання

1. Визначте суму внутрішніх кутів п'ятикутника.
2. Обчисліть суму відомих кутів: $110^\circ + 95^\circ$
3. Поясніть, **яку інформацію ще потрібно знати**, щоб знайти всі кути п'ятикутника.

Підказка для учнів: скористайтесь формулою суми внутрішніх кутів багатокутника.

Що формує:

- базове розуміння властивостей багатокутників;
- вміння працювати з формулою.

2. Середній рівень (застосування знань)

Завдання

1. Позначте $\angle C = x^\circ$
2. Запишіть $\angle D$ як вираз через x° .
3. Складіть рівняння, використовуючи умову $\angle C + \angle D = 250^\circ$
4. Знайдіть значення кутів: $\angle C$ і $\angle D$.

Що формує

- побудову математичної моделі;
- складання та розв'язування рівнянь.

3. Достатній рівень (повне розв'язання задачі)

Завдання

1. Знайдіть усі кути п'ятикутника.
2. Перевірте, чи дорівнює їх сума 540° .
3. Поясніть, які дані задачі є надлишковими або неточними.

Що формує

- логічне обґрунтування розв'язання;
- аналіз умов задачі.

4. Високий рівень (дослідницький)

Завдання

- 1) Порівняйте отримані кути з кутами правильного п'ятикутника.
- 2) Зробіть висновок, чи можна назвати цей п'ятикутник «майже правильним».
- 3) Запропонуйте:

- як змінити кути, щоб фігура стала правильним п'ятикутником;
- або створіть інший варіант п'ятикутника, який теж відповідає умовам задачі.

4) За можливості побудуйте модель у GeoGebra та перевірте свій висновок.

Що формує:

- критичне мислення;
- математичне моделювання;
- дослідницькі навички.

Критерії оцінювання компетентісно орієнтованого завдання відповідно до підходів НУШ із прив'язкою до математичних освітніх галузевих результатів (МАО) та переведенням у 12-бальну шкалу.

Рівень	Бали	МАО 1 (аналіз ситуації)	МАО 2 (математичне моделювання)	МАО 3 (аналіз і оцінка результату)
Початковий	1	Розпізнає окремі об'єкти (ділянки, фігури)	Не будує модель	Не аналізує результат
	2	Частково розуміє, що ділянки мають форму чотирикутників	Пробує позначити окремі елементи (сторони), але без зв'язку	Не робить висновків
	3	За допомогою визначає окремі дані, не враховує їх повноту	Виконує окремі обчислення за зразком	Дає фрагментарні відповіді без обґрунтування
Середній	4	Визначає проблему (неповні/неточні дані), частково аналізує умову	Будує спрощену модель для окремої ділянки	Робить часткові висновки без узагальнення
	5	Аналізує надані дані, але не повністю розрізняє надлишкові/відсутні	Складає модель (позначення, формули), допускає помилки	Пояснює результат частково, без глибокого аналізу
	6	Виділяє основні дані задачі, частково оцінює їх достатність	Правильно моделює окремі ділянки, знаходить більшість величин	Дає загальний висновок без оцінки доцільності
Достатній	7	Аналізує умову, визначає відсутні або неточні дані	Будує модель для більшості ділянок, застосовує властивості чотирикутників	Пояснює результати, пов'язує їх із умовою
	8	Чітко структурує дані, визначає, що потрібно знайти	Коректно обчислює площі, периметри, перевіряє результати	Обґрунтовує вибір форм ділянок відповідно до функцій

	9	Повно аналізує умову, враховує всі типи даних (повні/неповні/надлишкові)	Створює повну математичну модель усього плану	Аналізує доцільність рішень, формулює обґрунтований висновок
Високий	10	Критично оцінює план, визначає суперечності в даних	Удосконалює модель (вносить уточнення, оптимізує розрахунки)	Пояснює вплив неточностей на результат
	11	Пропонує власні уточнення до умови (нові дані, обмеження)	Використовує альтернативні способи (різні фігури, інструменти)	Порівнює різні варіанти рішень, обґрунтовує вибір
	12	Самостійно формулює розширену проблему або новий варіант задачі	Створює узагальнену або альтернативну модель дворика	Обґрунтовує рішення з урахуванням екологічності, ефективності та практичності

2.1.3. Таємниця шкільного фонтану

Авторка: *Лискова Світлана Миколаївна, вчитель математики Золотоніської спеціалізованої школи №2 інформаційних технологій Золотоніської міської ради Черкаської області*

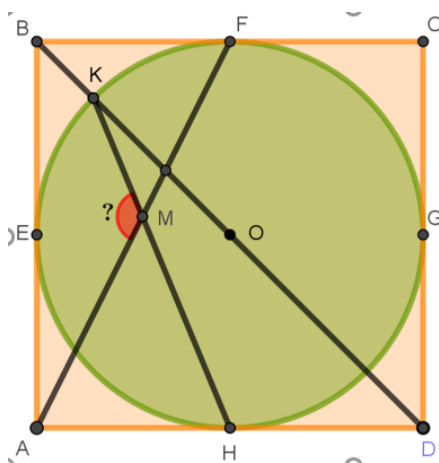
У шкільному дворі планують встановити круглий фонтан. По краю чаші фонтану вирішили розмістити 4 декоративні скульптури у точках А, В, С, D.



Архітектор підготував ескіз, але під час перевірки документації з'ясувалося, що частина вимірювань зроблена приблизно. Декілька учнів виконали власні вимірювання, і результати не збігаються. Вам доручено провести математичне дослідження і встановити, які дані правильні.

Відомо:

✓ коло має центр O;



- ✓ центральний кут $\angle AOB = 140^\circ$;
- ✓ один учень записав, що $\angle ACB = 70^\circ$;
- ✓ інший виміряв $\angle ADB = 68^\circ$;
- ✓ у кресленні є запис $\angle AOC = 210^\circ$, але невідомо, чи правильний він;
- ✓ архітектор хоче розділити чашу фонтану на 4 декоративні сектори різного розміру.

Дані для дослідження

Таблиця 1. Результати вимірювань

Джерело	Кут	Значення
Архітектор	$\angle AOB$	140°
Учень 1	$\angle ACB$	70°
Учень 2	$\angle ADB$	68°
Креслення	$\angle AOC$	210°
Потрібно знайти	$\angle ABC$	?

ЗАВДАННЯ

1. Математичне розслідування

Пригадайте властивість центрального та вписаного кута.

1. Знайдіть теоретичне значення вписаного кута, що спирається на дугу АВ.

2. Перевірте записи учнів.

3. Визначте, який результат є точнішим.

2. Пошук помилки

1. Чи може $\angle ADB = 68^\circ$, якщо він спирається на ту саму дугу АВ?

2. Яка можлива причина похибки вимірювання?

3. Аналіз суперечливого запису

1. Перевірте, чи може $\angle AOC = 210^\circ$ відповідати даній схемі.

2. Якщо ні — запропонуйте більш імовірне значення.

4. Дослідницьке завдання

Архітектор хоче зробити 4 різні сектори фонтану для різних видів підсвічування. Потрібно:

1. Визначити приблизні міри секторів кола.

2. Побудувати схему поділу кола.

3. Запропонувати, який сектор варто зробити найбільшим, якщо там планується головний струмінь води.

Міні-дослідження

Заповніть таблицю:

Центральний кут	Вписаний кут
60°	
90°	
120°	
180°	

Зробіть висновок про залежність між цими кутами.

Ресурси для дослідження

Учні можуть використати:

- GeoGebra (модель кола та вимірювання кутів)
- онлайн-симуляції центральних і вписаних кутів
- довідники або підручники з геометрії
- навчальні відео з теми.

КОМПЕТЕНТНОСТІ, ЩО ФОРМУЮТЬСЯ

1. Математична предметна компетентність

Під час виконання завдання учні:

- застосовують властивості центральних і вписаних кутів для розв'язування практичних задач;
- встановлюють зв'язок між геометричними величинами (центральний кут — вписаний кут — дуга кола);
- аналізують неповні, надлишкові або суперечливі дані;
- будують математичну модель реальної ситуації (розміщення об'єктів на колі);
- виконують обґрунтування та перевірку отриманих результатів;

- використовують таблиці, схеми, креслення для дослідження геометричних залежностей.

2. Ключові компетентності (відповідно до НУШ)

Спілкування державною мовою

Учні:

- формують математичні висновки;
- аргументують свої міркування;
- пояснюють розв'язання задачі усно або письмово.

Інформаційно-цифрова компетентність

Учні:

- використовують цифрові інструменти (наприклад GeoGebra) для побудови геометричних моделей;
- перевіряють гіпотези за допомогою комп'ютерних моделей;
- працюють з різними джерелами інформації.

Уміння вчитися впродовж життя

Учні:

- аналізують проблему та планують послідовність дій;
- здійснюють самоперевірку результатів;
- роблять висновки з отриманих даних.

Ініціативність і підприємливість

Учні:

- пропонують власні способи розв'язання задачі;
- моделюють практичні ситуації (дизайн об'єкта, розміщення елементів).

3. Наскрізнi вміння

У процесі виконання завдання розвиваються:

- критичне мислення — аналіз правильності даних;
- уміння розв'язувати проблеми — пошук відсутніх або неточних даних;
- логічне мислення — встановлення причинно-наслідкових зв'язків;
- уміння працювати з інформацією — аналіз таблиць, схем, вимірювань;
- співпраця в групі — обговорення результатів та формування спільного висновку.

ОЧІКУВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

Після виконання завдання учні зможуть:

Геометричні знання та розуміння

- пояснювати взаємозв'язок між центральним і вписаним кутами кола;
- формувати та застосовувати властивість вписаного кута, що спирається на дугу кола;

- встановлювати залежність між центральним кутом, вписаним кутом та дугою кола.

Уміння застосовувати знання

Учні зможуть:

- визначати градусні міри вписаних і центральних кутів за відомими даними;
- використовувати властивості кутів кола для розв'язування практичних задач;
- аналізувати неповні, надлишкові або суперечливі дані;
- перевіряти правильність вимірювань та обґрунтовувати отримані результати.

Дослідницькі вміння

Учні навчаться:

- досліджувати геометричні залежності за допомогою схем, таблиць, моделей;
- будувати та аналізувати математичну модель реальної ситуації;
- формулювати припущення та перевіряти їх.

Робота з інформацією

Учні зможуть:

- працювати з таблицями, кресленнями, схемами;
- використовувати цифрові інструменти (наприклад GeoGebra) для дослідження геометричних залежностей;
- знаходити та аналізувати інформацію з різних джерел.

ПОВНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Відомо

$\angle AOB = 140^\circ$ — центральний кут

$\angle ACB = 70^\circ$ — вписаний кут

$\angle ADB = 68^\circ$ — вписаний кут

$\angle AOC = 210^\circ$ — запис у кресленні (потрібно перевірити)

1. Перевірка кута $\angle ACB$

Вписаний кут, що спирається на ту саму дугу, дорівнює половині центрального кута.

Підставимо значення:

$$\angle ACB = 1/2 \cdot 140^\circ$$

$$\angle ACB = 70^\circ$$

Висновок: Запис учня правильний.

2. Перевірка кута $\angle ADB$

$\angle ADB$ також є вписаним і спирається на ту саму дугу AB.

Отже, $\angle ADB = 1/2 \cdot 140^\circ$, $\angle ADB = 70^\circ$

Фактичне вимірювання: 68°

$$\text{Похибка } 70^\circ - 68^\circ = 2^\circ$$

Висновок: вимірювання зроблене з похибкою 2° (можлива неточність транспортира або креслення).

3. Перевірка запису $\angle AOC = 210^\circ$

У колі: повний кут $= 360^\circ$. Якщо $\angle AOB = 140^\circ$, то дуга $AB = 140^\circ$.
Якщо $\angle AOC = 210^\circ$, то дуга $AC = 210^\circ$. Тоді: $\angle BOC = 210^\circ - 140^\circ$,
 $\angle BOC = 70^\circ$

Геометрично це можливо, але тоді точка С повинна бути розташована на більшій дузі АВ, що може не відповідати ескізу.

Ймовірна причина:

- переплутано велику і малу дугу;
- реальне значення могло бути 150° або 160° .

Висновок розслідування

1. $\angle ACB = 70^\circ$ — правильне значення.
2. $\angle ADB$ має дорівнювати 70° , тому 68° — вимір із похибкою.
3. Запис $\angle AOC = 210^\circ$ потребує уточнення (можлива помилка в кресленні).

Дослідницька таблиця

<i>Центральний кут</i>	<i>Вписаний кут</i>
60°	30°
90°	45°
120°	60°
180°	90°

Висновок

Вписаний кут, що спирається на ту саму дугу, у два рази менший за центральний.

ДИФЕРЕНЦІАЦІЯ ЗАВДАННЯ (4 РІВНІ СКЛАДНОСТІ)

Початковий рівень

Учні:

- визначають центральний і вписаний кути на рисунку;
- знаходять вписаний кут за відомим центральним.

Завдання

Якщо центральний кут дорівнює: 80° , 120° , 160° знайдіть відповідні вписані кути.

Середній рівень

Учні:

- використовують властивість вписаного кута;
- виконують прості обчислення.

Завдання

У колі $\angle AOB = 130^\circ$. Знайдіть: $\angle ACB$, $\angle ADB$, якщо вони спираються на дугу АВ.

Достатній рівень

Учні:

- аналізують дані;
- перевіряють правильність вимірювань.

Завдання

У колі: $\angle AOB = 150^\circ$, $\angle ACB = 75^\circ$, $\angle ADB = 72^\circ$

Потрібно:

- перевірити правильність вимірювань;

- знайти похибку;
- пояснити можливу причину неточності.

Високий рівень (дослідницький)

Учні:

- аналізують реальну ситуацію;
- працюють з моделлю;
- роблять висновки.

Завдання

Круглий фонтан поділено точками А, В, С, D.

Відомо: $\angle AOB = 140^\circ$, $\angle BOC = 80^\circ$

Потрібно:

1. знайти всі вписані кути, що спираються на дуги АВ і ВС;
2. визначити, який сектор фонтану найбільший;
3. побудувати модель у GeoGebra;
4. перевірити результати вимірюванням.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

виконання компетентнісно орієнтованого завдання (тема «Центральні та вписані кути», 8 клас) відповідно до підходів НУШ із використанням груп результатів MAO 1–MAO 3 та переведенням у 12-бальну шкалу.

<i>Рівень</i>	<i>Бали</i>	<i>MAO 1. Дослідження ситуації та виокремлення проблеми</i>	<i>MAO 2. Математичне моделювання і стратегія розв'язання</i>	<i>MAO 3. Критичне оцінювання результату</i>
Початковий	1	Учень/учениця з допомогою вчителя розпізнає окремі елементи задачі, але не може визначити проблему.	Не пропонує способу розв'язання або виконує дії випадково.	Не перевіряє правильність результату.
	2	Частково визначає дані задачі, але не встановлює між ними зв'язків.	Виконує окремі дії за зразком учителя.	Не може пояснити отриманий результат.
	3	Визначає деякі відомі дані задачі, але потребує значної допомоги для формулювання проблеми.	Застосовує окремі математичні дії за підказкою.	Дає коротку відповідь без перевірки або пояснення.
Середній	4	Визначає основні дані задачі та частково формулює проблему.	Використовує відому формулу або правило для часткового розв'язання.	Робить просту перевірку або порівняння результату.
	5	Розуміє зміст задачі та визначає, які	Складає просту математичну	Частково пояснює правильність

		математичні знання потрібні для її розв'язання.	модель ситуації (використовує формулу або схему).	отриманого результату.
	6	Виокремлює проблему та аналізує дані (може відокремити зайву інформацію).	Використовує властивості центральних і вписаних кутів для розв'язання задачі.	Робить перевірку результату та пояснює його з допомогою вчителя.
Достатній	7	Самостійно аналізує ситуацію, визначає потрібні та зайві дані.	Створює математичну модель (схему, рисунок, рівність) та виконує обчислення.	Перевіряє правильність результату і пояснює його.
	8	Формулює проблему та визначає спосіб її розв'язання.	Обґрунтовано застосовує властивості центральних і вписаних кутів.	Аналізує правильність результату та пояснює можливі похибки.
	9	Аналізує ситуацію, робить припущення щодо відсутніх або неточних даних.	Будує модель задачі (креслення, таблицю, схему) та правильно виконує обчислення.	Робить аргументований висновок щодо правильності результатів.
Високий	10	Самостійно досліджує ситуацію, формулює проблему та визначає кілька можливих підходів до її розв'язання.	Будує повну математичну модель задачі, використовує кілька способів розв'язання.	Оцінює правильність результату та пояснює можливі помилки вимірювання.
	11	Глибоко аналізує ситуацію, робить обґрунтовані припущення щодо невідомих даних.	Ефективно використовує математичні методи та інструменти (схеми, цифрові моделі).	Критично оцінює результат і пропонує покращення розв'язання.
	12	Самостійно досліджує проблему, аргументовано пояснює всі етапи її аналізу.	Створює математичну модель реальної ситуації, обґрунтовує стратегію розв'язання.	Робить повний аналіз отриманих результатів, формулює узагальнення та висновки.

АЛГОРИТМ УПРОВАДЖЕННЯ КЕЙС-МЕТОДУ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

1. Підготовчий етап (до уроку)

Крок 1. Визначити навчальну мету

- обрати тему уроку;
- визначити компетентності, що формуються;

- визначити очікувані результати навчання.

Крок 2. Створити кейс (ситуацію)

Кейс повинен містити:

- опис реальної або наближеної до реальної ситуації;
- неповні, надлишкові або суперечливі дані;
- матеріали для аналізу (схеми, таблиці, креслення, діаграми);
- питання або проблемне завдання.

Крок 3. Підготувати матеріали

- роздаткові матеріали або робочі аркуші;
- схеми, рисунки, таблиці;
- цифрові ресурси (GeoGebra, відео, симуляції).

Крок 4. Продумати організацію роботи

- визначити форму роботи (пари, групи, індивідуальна);
- розподілити ролі в групах;
- підготувати критерії оцінювання.

ЕТАПИ РОБОТИ З КЕЙСОМ НА УРОЦІ

1. Мотиваційний етап (вхід у кейс)

Мета: викликати інтерес і сформулювати проблему.

Дії вчителя:

- пропонує учням опис ситуації або проблеми;
- демонструє рисунок, таблицю або фото;
- ставить проблемні запитання.

Приклади запитань:

- Що потрібно з'ясувати у цій ситуації?
- Які дані відомі?
- Якої інформації не вистачає?

2. Аналіз кейсу

Мета: дослідити ситуацію та визначити проблему.

Дії учнів:

- аналізують дані кейсу;
- виділяють суттєву та зайву інформацію;
- формують проблему.

Дії вчителя:

- спрямовує обговорення;
- ставить уточнювальні запитання;
- допомагає структурувати інформацію.

3. Моделювання та пошук розв'язання

Мета: побудувати математичну модель ситуації.

Учні:

- будують рисунок, схему або таблицю;
- застосовують математичні правила та формули;
- виконують обчислення;
- пропонують кілька можливих рішень.

Вчитель:

- консультує групи;
- ставить запитання для розвитку критичного мислення;
- заохочує різні підходи до розв'язання.

4. Презентація результатів

Мета: представити та обґрунтувати розв'язання.

Учні:

- презентують результати;
- пояснюють спосіб розв'язання;
- відповідають на запитання інших груп.

Вчитель:

- організовує обговорення;
- порівнює різні підходи.

5. Рефлексія та оцінювання

Мета: оцінити процес і результат роботи.

Учні:

- аналізують власну роботу;
- визначають труднощі;
- роблять висновки.

Вчитель:

- використовує критерії оцінювання;
- організовує самооцінювання та взаємооцінювання.

ФОРМАТИ ОРГАНІЗАЦІЇ РОБОТИ УЧНІВ

1. Робота в парах

Алгоритм:

1. Учні отримують кейс.
2. Разом аналізують умову.
3. Обговорюють можливі способи розв'язання.
4. Виконують обчислення.
5. Представляють спільний результат.

Переваги:

- швидке обговорення;
- активність кожного учня.

2. Робота в малих групах (3–4 учні)

Розподіл ролей у групі

Роль	Функція
Аналітик	аналізує умову задачі
Математик	виконує обчислення
Секретар	записує розв'язання
Презентатор	представляє результат

Алгоритм:

1. Учні читають кейс.
2. Обговорюють проблему.
3. Розподіляють ролі.
4. Будують математичну модель.
5. Виконують обчислення.

6. Готують презентацію результату.

3. Метод «Експертних груп»

Алгоритм:

1. Клас ділиться на групи експертів.

2. Кожна група досліджує окремий аспект кейсу.

3. Потім учні об'єднуються у змішані групи.

4. Кожен «експерт» пояснює свою частину.

Цей метод добре підходить для складних кейсів або дослідницьких задач.

2.1.4. Ремонт басейну у спортивному комплексі

Авторка: *Озірська Світлана Іванівна, вчитель математики Золотоніської спеціалізованої школи №2 інформаційних технологій Золотоніської міської ради Черкаської області*

Спортивний комплекс має басейн у формі прямокутного паралелепіпеда довжиною 80 м, шириною 15 м та глибиною 3 м. Під час



ремонту вирішили замінити внутрішнє покриття басейну плитками розміром 25 см на 25 см.

Відомо, що 0,5 м над водою – це бордюр, який покривати плиткою не потрібно.

Чи вистачить 250 000 гривень бюджетних коштів, виділених на ремонт басейну, якщо:

- вартість 1 м² плитки – 350 грн,
- водостійкого клею – 400 грн за мішок (вистачає на 20 м² плитки),
- майстри беруть 60% вартості матеріалів?

Завдання

1. Обчисліть площу внутрішньої поверхні басейну, яку потрібно покрити плиткою (дно та стінки).
2. Обчисліть, скільки плиток потрібно для заміни покриття (плитка 25 см × 25 см).
3. Визначте, скільки мішків клею потрібно купити, та обчисліть загальну вартість матеріалів.
4. Визначте загальну вартість ремонту з урахуванням оплати праці майстрів та зробіть висновок, чи вистачить 250 000 грн.

Методичні рекомендації для вчителя

- очікувані результати навчання (згідно з НУШ),
- перелік компетентностей та наскрізних вмінь, що формуються,
- повне розв'язання,
- критерії оцінювання
- можливі варіанти диференціації.

Очікувані результати навчання

I. Предметна компетентність (математична)

Учень/учениця:

– обчислює площу поверхні прямокутного паралелепіпеда (дно та бічні грані) та застосовує формули площі прямокутника;

- виконує перетворення одиниць вимірювання ($\text{см} \rightarrow \text{м}$, $\text{см}^2 \rightarrow \text{м}^2$);
- знаходить кількість плиток за відомою площею та площею однієї плитки;
- розв’язує практичні задачі на витрати матеріалів (округлення кількості мішків клею до цілого);
- виконує фінансові розрахунки: загальна вартість матеріалів, відсоткова оплата праці, порівняння з бюджетом.

II. Ключові компетентності

1. *Математична компетентність.* Моделює реальну ситуацію (ремонт басейну) через обчислення площ і фінансових витрат.
2. *Інформаційно-комунікаційна компетентність.* Виділяє потрібні дані з умови, працює з одиницями вимірювання, за потреби використовує калькулятор.
3. *Підприємливість і фінансова грамотність.* Порівнює витрати з бюджетом, робить обґрунтований висновок щодо достатності коштів.
4. *Уміння навчатися впродовж життя.* Будує послідовний план розв’язання багатокрокової задачі.

III. Наскрізні вміння

Читання з розумінням: коректно інтерпретує, що плиткою покривають лише внутрішні поверхні басейну, а бордюр не враховують.

Логічне обґрунтування: пояснює вибір формул і послідовність дій.

Розв’язування проблем: переходить від геометричних розрахунків до практичного висновку про бюджет.

Розв’язання

1) Площа поверхні, яку потрібно покрити плиткою

Покриваємо: дно + 4 стінки (внутрішня частина). Бордюр 0,5 м над водою плиткою не покривають, але він не входить у глибину басейну, бо глибина задана як 3 м (внутрішня глибина). Отже, плиткою покриваємо стінки на висоту 3 м.

Дно:

$$S_{\text{дно}} = 80 \cdot 15 = 1200 \text{ м}^2$$

Дві довгі стінки:

$$S_1 = 2 \cdot (80 \cdot 3) = 2 \cdot 240 = 480 \text{ м}^2$$

Дві короткі стінки:

$$S_2 = 2 \cdot (15 \cdot 3) = 2 \cdot 45 = 90 \text{ м}^2$$

Загальна площа:

$$S = 1200 + 480 + 90 = 1770 \text{ м}^2$$

Відповідь: потрібно 1770 м² плитки (за площею покриття).

2) Кількість плиток

Розмір плитки: 25 см $\times$ 25 см = 0,25 м $\times$ 0,25 м

Площа однієї плитки:

$$S_{\text{пл}} = 0,25 \cdot 0,25 = 0,0625 \text{ м}^2$$

Кількість плиток:

$$N = \frac{1770}{0,0625} = 28320 \text{ шт.}$$

3) Клей і вартість матеріалів

Вартість плитки:

$1770 \cdot 350 = 619500$ грн

Клей: 1 мішок на 20 м^2

$$\frac{1770}{20} = 88,5$$

Потрібно купити 89 мішків.

Вартість клею:

$89 \cdot 400 = 35600$ грн

Разом матеріали:

$619500 + 35600 = 655100$ грн

4) Загальна вартість ремонту і висновок про бюджет

Оплата майстрів = 60% вартості матеріалів:

$0,6 \cdot 655100 = 393060$ грн

Загальна вартість:

$655100 + 393060 = 1048160$ грн

Порівняння з бюджетом 250 000 грн:

$1048160 > 250000$

Висновок: 250 000 грн не вистачить.

Орієнтовні критерії оцінювання

Завдання	Бали	Критерії оцінювання
1. Обчислення площі внутрішньої поверхні басейну	1	Правильно знайдена площа дна басейну
	1	Правильно обчислена площа бічних стінок
	1	Правильно знайдена загальна площа покриття
	Максимум: 3 бали	
2. Визначення кількості плиток	1	Правильно переведено розміри плитки у метри та знайдена площа однієї плитки
	1	Правильно записано вираз для знаходження кількості плиток
	1	Правильно обчислено кількість плиток
	Максимум: 3 бали	
3. Обчислення вартості матеріалів	1	Правильно обчислена вартість плитки
	1	Правильно визначена кількість мішків клею з округленням у більший бік
	1	Правильно знайдена загальна вартість матеріалів
	Максимум: 3 бали	
4. Визначення загальної вартості ремонту та аналіз бюджету	1	Правильно обчислена вартість роботи майстрів
	1	Правильно знайдена загальна вартість ремонту
	1	Зроблено правильний обґрунтований висновок про недостатність бюджету
	Максимум: 3 бали	

Можливі варіанти диференціації

Охоплюють зміст, процес і результат, дозволяючи адаптувати задачу для учнів з різним рівнем підготовки та стилем навчання.

Диференціація за змістом (Що вивчаємо?)

Цей варіант адаптує самі дані або складність математичних об'єктів.

1. Спрощення числових даних:

Для слабших учнів: використовувати менші числові значення (наприклад, довжина 20 м, ширина 10 м, глибина 2 м), щоб уникнути великих обчислень із чотирицифровими числами.

Для сильніших учнів: додати відсотковий запас плитки (7–10%) на підрізання та бій і вимагати перерахунку повного кошторису.

2. Виключення надлишкових даних:

Для слабших учнів: прибрати інформацію про оплату праці майстрів або про клей, залишивши лише розрахунок площі та вартості плитки.

Для сильніших учнів: залишити всі дані та додати додаткову умову (наприклад, зміну ціни плитки або знижку 5%).

3. Зміна типу геометричної моделі:

Для сильніших учнів: запропонувати врахувати, що частина басейну має сходинок (додаткова прямокутна поверхня), і перерахувати площу покриття.

Диференціація за процесом (Як працюємо?)

Цей варіант адаптує спосіб виконання завдань, забезпечуючи різну підтримку.

1. Різна ступінь підтримки (сходинок допомоги):

Для слабших учнів: надати алгоритм-підказку:

Крок 1: Знайти площу дна.

Крок 2: Знайти площу 4 стінок.

Крок 3: Додати площі.

Крок 4: Обчислити вартість плитки.

Крок 5: Додати вартість клею та роботи.

Для сильніших учнів: запропонувати самостійно скласти план розрахунку кошторису.

2. Групова робота:

Гетерогенні групи: учні з вищим рівнем підготовки виконують фінансові розрахунки, учні із середнім рівнем – геометричні обчислення площі.

3. Використання інструментів:

Для слабших учнів: дозволити використання калькулятора або електронних таблиць (Excel/Google Sheets) для виконання громіздких обчислень.

Для сильніших учнів: запропонувати створити таблицю розрахунків самостійно.

Диференціація за результатом (Що отримуємо?)

Цей варіант адаптує форму подання кінцевого продукту.

1. Обов'язковий та додатковий результат:

Обов'язковий результат: усі учні мають правильно знайти площу покриття та зробити висновок щодо достатності бюджету.

Додатковий результат: учні, які швидко виконали обов'язкову частину, мають:

- оформити кошторис у вигляді таблиці;
- запропонувати спосіб зменшення витрат і математично обґрунтувати його;
- порівняти два варіанти (з запасом плитки і без нього).

2. Формат подання:

– Один учень може надати розв'язок у формі традиційного письмового звіту.

– Інший може представити розрахунок у вигляді таблиці або короткої презентації, пояснюючи логіку кошторису.

2.1.5. Клумба з тюльпанами на подвір'ї школи

Авторка: *Озірська Світлана Іванівна, вчитель математики Золотоніської спеціалізованої школи №2 інформаційних технологій Золотоніської міської ради Черкаської області*

Керівництво школи вирішило облаштувати декоративну клумбу у формі трьох вкладених правильних трикутників різного кольору так, як зображено на рисунку.



Відомо, що:

- сторона внутрішнього трикутника (1) дорівнює 3 м;
- коефіцієнт подібності між трикутниками 1 і 2, а також між 2 і 3 становить 1,5;
- на 1 м² клумби висаджують 15 тюльпанів;
- під час закупівлі необхідно передбачити 5% запасу посадкового матеріалу;

– вартість 1 тюльпана – 25 грн;

– бюджет школи на закупівлю тюльпанів – 6000 грн.

Для обчислень скористайтесь калькулятором, площі округліть до сотих.

Завдання

1. Знайдіть довжини сторін другого та третього трикутників.
2. Обчисліть площу кожного трикутника (1, 2, 3).
3. Знайдіть площу кожної кольорової частини клумби (внутрішня частина, смуга між 1 і 2, смуга між 2 і 3).
4. Обчисліть загальну кількість тюльпанів, які потрібно висадити (без запасу).
5. Визначте, чи вистачить виділеного бюджету з урахуванням 5% запасу.

Методичні рекомендації для вчителя

- очікувані результати навчання (згідно з НУШ),
- перелік компетентностей та наскрізних вмінь, що формуються,
- повне розв'язання,
- критерії оцінювання,
- можливі варіанти диференціації.

Очікувані результати навчання

I. Предметна компетентність (математична)

Учень/учениця:

- застосовує властивості подібних фігур (коефіцієнт подібності);

- використовує формулу площі правильного трикутника

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

- установлює залежність між площами подібних фігур і квадратом коефіцієнта подібності;
- знаходить площу складеної фігури як різницю площ подібних трикутників;
- виконує обчислення з десятковими дробами та коректно округлює результати (до сотих і до цілих чисел відповідно до змісту задачі);
- застосовує відсоткові розрахунки (5% запасу);
- здійснює фінансові обчислення та формулює висновок щодо достатності бюджету.

II. Ключові компетентності

1. Математична грамотність – моделювання реальної ситуації засобами геометрії та арифметичних розрахунків.
2. Підприємливість і фінансова грамотність – розрахунок витрат, урахування відсоткових змін і порівняння з бюджетом.
3. Інформаційно-комунікаційна компетентність – використання калькулятора для виконання обчислень із коренями та десятковими дробами.
4. Уміння навчатися впродовж життя – планування послідовності розв’язання багатокрокової задачі та самоперевірка результатів.

III. Наскрізнi вміння

Читання з розумінням – виділення суттєвих даних та інтерпретація умови задачі.

Логічне обґрунтування – пояснення послідовності обчислень та правильності застосованих формул.

Розв’язування проблем – прийняття обґрунтованого рішення щодо достатності бюджету на основі виконаних розрахунків.

Розв’язання

1. Знаходження сторін трикутників 2 і 3

$$a_1 = 3 \text{ м}, k = 1,5$$

$$a_2 = a_1 \cdot k = 3 \cdot 1,5 = 4,5 \text{ м}$$

$$a_3 = a_2 \cdot k = 4,5 \cdot 1,5 = 6,75 \text{ м}$$

2. Обчислення площ трикутників

Формула площі правильного трикутника:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

Трикутник 1:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3^2 \approx 3,9 \text{ м}^2$$

Трикутник 2:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4,5^2 \approx 8,77 \text{ м}^2$$

Трикутник 3:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6,75^2 \approx 19,73 \text{ м}^2$$

3. Площі кольорових частин клумби

Внутрішня частина (колір 1):

$$S_{\text{вн}} = S_1 = 3,90 \text{ м}^2$$

Смуга між 1 і 2 (колір 2):

$$S_2 - S_1 = 8,77 - 3,90 = 4,87 \text{ м}^2$$

Смуга між 2 і 3 (колір 3):

$$S_3 - S_2 = 19,73 - 8,77 = 10,96 \text{ м}^2$$

4. Кількість тюльпанів (без запасу)

На 1 м² припадає 15 тюльпанів.

$$N_{\text{заг}} = S_3 \cdot 15 = 19,73 \cdot 15 = 295,95 \approx 296 \text{ шт.}$$

5. Перевірка бюджету з урахуванням 5% запасу та ціни 25 грн/шт

Кількість із запасом 5%:

$$N_{\text{із запасом}} = 296 \cdot 1,05 = 310,8 \approx 311 \text{ шт.}$$

Вартість:

$$C = 311 \cdot 25 = 7775 \text{ грн}$$

Порівняння з бюджетом 6000 грн:

$$7775 > 6000$$

На скільки не вистачає:

$$7775 - 6000 = 1775 \text{ грн}$$

Висновок: бюджету не вистачить, потрібно додатково 1775 грн.

Орієнтовні критерії оцінювання

<i>Завдання</i>	<i>Бали</i>	<i>Критерії оцінювання</i>
1. Визначення сторін подібних трикутників	1	Правильно знайдено сторону другого трикутника
	1	Правильно знайдено сторону третього трикутника
	1	Коректно застосовано коефіцієнт подібності
	Максимум: 3 бали	
2. Обчислення площ трикутників та складеної фігури	1	Правильно записано формулу площі правильного трикутника
	1	Правильно обчислено площі трикутників
	1	Правильно визначено площі кольорових частин (різниця площ).
	Максимум: 3 бали	
3. Визначення кількості тюльпанів	1	Правильно застосовано норму 15 тюльпанів на 1м ² .
	1	Правильно обчислено загальну кількість тюльпанів без запасу
	1	Правильно враховано 5% запасу та виконано округлення до цілого

	Максимум: 3 бали	
4. Визначення вартості та аналіз бюджету	1	Правильно обчислено вартість закупівлі
	1	Правильно виконано порівняння з бюджетом
	1	Зроблено правильний висновок щодо недостатності бюджету
	Максимум: 3 бали	

Можливі варіанти диференціації

Охоплюють зміст, процес і результат, дозволяючи адаптувати задачу для учнів з різним рівнем підготовки та стилем навчання.

Диференціація за змістом (Що вивчаємо?)

Цей варіант адаптує самі дані або складність математичних об'єктів.

1. Спрощення числових даних:

Для слабших учнів: використати $a_1=2$ м та $k=2$, щоб площі й кількість тюльпанів обчислювалися простіше.

Для сильніших учнів: залишити $k=1,5$, але додати умову «10% запасу» або різну щільність посадки (наприклад, 12/15/18 тюльпанів на 1 м² для трьох зон).

2. Виключення надлишкових даних:

Для слабших учнів: прибрати фінансову частину (вартість і бюджет), залишивши лише площі та кількість тюльпанів.

Для сильніших учнів: додати альтернативний бюджет або знижку (наприклад, -7% при купівлі понад 300 шт.) і попросити порівняти варіанти.

3. Зміна типу задачі:

Для сильніших учнів: запропонувати знайти коефіцієнт подібності k , якщо відома площа зовнішнього трикутника та сторона внутрішнього, і лише потім виконати розрахунки.

Диференціація за процесом (Як працюємо?)

Цей варіант адаптує спосіб виконання завдань, забезпечуючи різну підтримку.

1. Різна ступінь підтримки (сходінки допомоги):

Для слабших учнів: надати алгоритм-підказку:

Крок 1: Знайдіть a_2 і a_3 через k .

Крок 2: Запишіть формулу площі правильного трикутника.

Крок 3: Обчисліть S_1, S_2, S_3 і округліть.

Крок 4: Знайдіть різниці площ для смуг.

Крок 5: Помножте площу на 15, додайте 5% запасу та перевірте бюджет.

Для сильніших учнів: запропонувати самостійно скласти план розв'язання і пояснити, на якому кроці та чому потрібне округлення.

2. Групова робота:

Гетерогенні групи: учні з вищим рівнем виконують фінансовий блок і висновок, учні з середнім – геометричні обчислення площ.

3. Використання інструментів:

Для слабших учнів: дозволити використання калькулятора для $\sqrt{3}$ та множень із десятковими дробами.

Для сильніших учнів: запропонувати зробити перевірку через властивість площ подібних фігур $S \sim k^2$ (наприклад, $S_2 = S_1 \cdot k^2$, $S_3 = S_2 \cdot k^2$).

Диференціація за результатом (Що отримуємо?)

Цей варіант адаптує форму подання кінцевого продукту.

1. Обов'язковий та додатковий результат:

Обов'язковий результат: усі учні мають знайти площу клумби та кількість тюльпанів і зробити висновок щодо бюджету.

Додатковий результат: учні, які швидко виконали обов'язкову частину, мають:

- оформити розрахунки у вигляді таблиці (площа зони → тюльпани → вартість);
- запропонувати спосіб економії (зменшити щільність посадки/змінити запас/знайти потрібний бюджет) і обґрунтувати математично.

2. Формат подання:

- Один учень може надати розв'язок у формі традиційного письмового розрахунку.
- Інший може представити результат у вигляді таблиці або короткої презентації з поясненням кроків.

2.1.6. Будівництво пандуса біля школи

Авторка: *Озірська Світлана Іванівна, вчитель математики Золотоніської спеціалізованої школи №2 інформаційних технологій Золотоніської міської ради Черкаської області*

Для облаштування пандуса потрібно визначити його довжину.



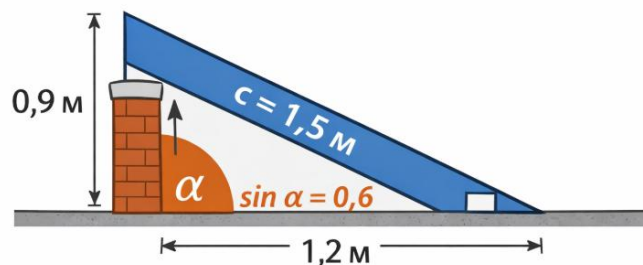
Висота сходинки – 0,9 м.

Довжина проєкції пандуса на землю – 1,2 м.

Пандус разом із землею та висотою сходинки утворює прямокутний трикутник.

Завдання

1. Знайдіть довжину пандуса.
2. Знайдіть площу отриманого прямокутного трикутника.
3. Знайдіть синус кута нахилу пандуса до землі.
4. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 13 см, один катет – 5 см. Знайдіть другий катет.



Методичні рекомендації для вчителя.

Очікувані результати навчання.

I. Предметна компетентність (математична).

Учень:

- знає теорему Піфагора;
- знаходить катети і гіпотенузу;
- застосовує тригонометричні відношення.

II. Ключові компетентності

Математична грамотність

- застосовує формули до практичних задач;
- виконує обчислення довжин і площ.

Практична компетентність

- застосовує математику в будівництві та проектуванні.

ІКТ-компетентність – перевірка обчислень за допомогою калькулятора чи електронних таблиць;

Уміння навчатися впродовж життя – класифікація задач, вибір потрібних формул, застосовуючи набути знання для розв’язування практичної проблеми;

Наскрізні вміння – аналіз умови, математичне моделювання, перевірка результатів.

III. Наскрізні вміння

- аналіз умови;
- математичне моделювання;
- перевірка результатів.

Розв’язання

1. Довжина пандуса

За теоремою Піфагора:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 0,9^2 + 1,2^2$$

$$c^2 = 0,81 + 1,44$$

$$c^2 = 2,25$$

$$c = 1,5 \text{ м}$$

$$\text{Довжина пандуса} = 1,5 \text{ м}$$

2. Площа трикутника

$$S = (a \times b) / 2$$

$$S = (0,9 \times 1,2) / 2$$

$$S = 0,54 \text{ м}^2$$

3. Синус кута нахилу

$$\sin \alpha = \text{протилежний катет} / \text{гіпотенуза}$$

$$\sin \alpha = 0,9 / 1,5$$

$$\sin \alpha = 0,6$$

4. Другий катет

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = 1,5^2 - 1,2^2$$

$$a^2 = 2,25 - 1,44$$

$$a^2 = 0,81$$

$$a = 0,9 \text{ м}$$

Орієнтовані критерії оцінювання

<i>Завдання</i>	<i>Бали</i>	<i>Критерії оцінювання</i>
1. Знаходження довжини пандуса	1	Правильно записана теорема Піфагора
	1	Правильно підставлені значення ($0,9^2 + 1,2^2$)
	1	Правильно виконані обчислення та отримана відповідь ($c = 1,5 \text{ м}$)
	Максимум: 3 бали	
2. Обчислення площі трикутника	1	Записано формулу площі прямокутного трикутника
	1	Правильно підставлені значення ($0,9 \times 1,2 / 2$)

	1	Правильно виконані обчислення та отримана відповідь ($S = 0,54 \text{ м}^2$)
	Максимум: 3 бали	
3. Знаходження синуса кута нахилу	1	Записано формулу для синуса ($\sin \alpha = \text{протилежний} / \text{гіпотенуза}$)
	1	Правильно підставлені значення (0,9 / 1,5)
	1	Правильно виконані обчислення та отримана відповідь ($\sin \alpha = 0,6$)
	Максимум: 3 бали	
4. Знаходження другого катета	1	Записано формулу для катета ($a^2 = c^2 - b^2$)
	1	Правильно підставлені значення ($13^2 - 5^2$)
	1	Правильно виконані обчислення та отримана відповідь ($a = 12 \text{ см}$)
	Максимум: 3 бали	

Можлива диференціація

За змістом:

- прості числа – базовий рівень;
- дробові значення – високий рівень.

За процесом:

- креслення трикутника;
- робота в парах.

За результатом:

- базово – знайти сторони;
- складніше – скласти власну практичну задачу.

Диференціація за змістом (Що вивчаємо?)

Цей варіант адаптує самі дані або складність математичних об'єктів.

1. Спрощення числових даних:

- Для слабших учнів: використовувати простіші числа (наприклад, висота = 1 м, основа = 1 м), щоб уникнути складних обчислень із десятковими дробами.

- Для сильніших учнів: дробові значення (наприклад, висота = 0,85 м, основа = 1,35 м), що ускладнить розрахунки та потребуватиме більшої точності.

2. Виключення надлишкових даних:

- Для слабших учнів: прибрати додаткові завдання (наприклад, про катет 5 см і гіпотенузу 13 см), щоб зосередитися лише на основній практичній задачі.

- Для сильніших учнів: залишити всі завдання та додати нові, наприклад, знайти косинус і тангенс кута нахилу.

3. Зміна типу задачі:

- Для сильніших учнів: запропонувати задачу з іншою практичною ситуацією (наприклад, розрахунок довжини похилої покрівлі чи сходів), що вимагає застосування тих самих формул у новому контексті.

Диференціація за процесом (Як працюємо?)

Цей варіант адаптує спосіб виконання завдань, забезпечуючи різну підтримку.

1. Різна ступінь підтримки (сходинки допомоги):
 - Для слабших учнів: надати алгоритм-підказку:
 - ✓ Крок 1: Запишіть теорему Піфагора.
 - ✓ Крок 2: Підставте відомі значення.
 - ✓ Крок 3: Виконайте обчислення.
 - ✓ Крок 4: Запишіть відповідь.
 - Для сильніших учнів: запропонувати самостійно сформулювати алгоритм розв'язання задачі.
2. Групова робота:
 - Гетерогенні групи: учні з різним рівнем підготовки допомагають одне одному. Сильний учень може пояснити застосування тригонометричних відношень, а учень із середнім рівнем — виконати обчислення площі.
3. Використання інструментів:
 - Для слабших учнів: дозволити використання калькулятора чи електронних таблиць (Excel/Google Sheets) для перевірки обчислень.
 - Для сильніших учнів: запропонувати виконати обчислення вручну, щоб відпрацювати навички точності та самоконтролю.

Диференціація за результатом (Що отримуємо?)

Цей варіант адаптує форму подання кінцевого продукту.

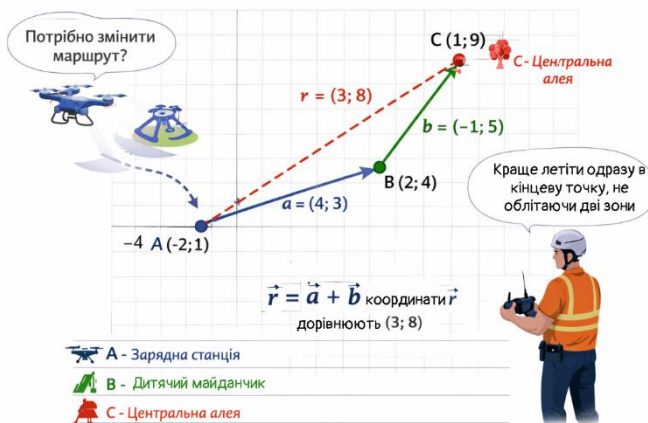
1. Обов'язковий та додатковий результат:
 - **Обов'язковий результат**: усі учні мають розв'язати завдання 1 і 2 (знаходження довжини пандуса та площі трикутника), демонструючи розуміння теореми Піфагора та формули площі.
 - **Додатковий результат**: учні, які швидко виконали обов'язкову частину, мають:
 - ✓ Побудувати схему прямокутного трикутника з позначенням сторін та кута нахилу.
 - ✓ Обчислити не лише синус, а й косинус та тангенс кута нахилу пандуса.
 - ✓ Скласти власну практичну задачу, пов'язану з будівництвом (наприклад, інший пандус, сходи чи дах), і запропонувати її розв'язання.
2. Формат подання:
 - Один учень може надати розв'язки у формі традиційного письмового звіту в зошиті.
 - Інший може представити розв'язок на інтерактивній дошці або у вигляді презентації, пояснюючи кроки розрахунку.
 - Учні з високим рівнем підготовки можуть створити інфографіку (схему пандуса з позначенням даних та результатів) або написати коротке пояснення для «замовника» (наприклад, директора школи), аргументуючи, чому саме така довжина пандуса відповідає нормам безпеки та зручності.

2.2. Мова напрямків: світ векторів

2.2.1. Маршрут безпілотної

Авторка: *Науменко Інна Миколаївна, вчитель математики Золотоніської гімназії ім. С. Д. Складенка Золотоніської міської ради Черкаської області*

У межах міського проєкту «Безпечне місто» використовується навчальний безпілотної (дрон), який щодня здійснює обліт парку для моніторингу стану зелених зон. Парк має форму координатної площини, де всі об'єкти позначені точками з відомими координатами.



Дрон стартує з точки $A(-2; 1)$ — місця зарядної станції.

Далі він рухається за заздалегідь спланованим маршрутом, що складається з послідовних переміщень, кожне

з яких описується вектором.

- Від точки A дрон переміщується на вектор $\vec{a} = (4; 3)$

і потрапляє в точку B — зону огляду дитячого майданчика.

- Потім дрон здійснює переміщення на вектор $\vec{b} = (-1; 5)$

і опиняється в точці C — над центральною алеєю парку.

- Через несприятливі погодні умови оператор вирішив змінити маршрут: замість двох переміщень $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дрон має виконати одне рівнозначне переміщення, щоб одразу потрапити з точки A в точку C .

Завдання

- Побудуй на координатній площині точки A , B і C та вектори переміщення дрона.

- Знайди координати точки B і точки C .

- Обчисли вектор переміщення, що є сумою векторів

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$

та поясни його зміст у контексті задачі.

- Перевір, чи збігається вектор $\vec{r}$ з вектором $\overrightarrow{AC}$.

- Зроби висновок, чому додавання векторів зручно використовувати під час планування маршрутів у реальному житті.

б) (За бажанням) Запропонуй альтернативний маршрут дрона, який складатиметься з двох інших векторів, але приведе дрон у ту саму кінцеву точку С.

Методичні рекомендації для вчителя

1. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

Після виконання задачі учень / учениця:

- будує точки та вектори на координатній площині, дотримуючись заданих координат і масштабу;
- визначає координати вектора за координатами його початку і кінця;
- обчислює координати точки після переміщення на заданий вектор;
- додає вектори координатним способом та знаходить результуючий вектор;
- пояснює геометричний зміст додавання векторів на прикладі реальної ситуації;
- використовує цифрові інструменти (GeoGebra) для побудови та перевірки результатів.

2. Перелік компетентностей, що формуються

- Математична компетентність: застосування векторів і координат для моделювання реальної ситуації та розв'язування задач.
- Інформаційно-цифрова компетентність: використання GeoGebra для побудови, дослідження й перевірки математичних моделей.
- Просторова та логіко-математична компетентності: аналіз і порівняння переміщень на координатній площині.
- Комунікативна компетентність: пояснення способу розв'язання з використанням математичної мови.
- Уміння навчатися впродовж життя: самоконтроль, перевірка результатів і виправлення помилок.
- Підприємливість та ініціативність: пошук оптимального маршруту та пропонування альтернативних рішень.

3. Перелік наскрізних вмінь, що формуються (soft skills)

- Критичне мислення: аналіз правильності побудов, перевірка відповідності координат і результатів.
- Уміння розв'язувати проблеми: пошук оптимального маршруту та альтернативних способів досягнення мети.
- Комунікація: аргументоване пояснення власних дій і висновків.
- Співпраця: робота в парі або групі під час побудови й обговорення результатів.
- Самоорганізація та відповідальність: планування дій, самоперевірка й виправлення помилок.

- Цифрова грамотність: свідоме та доцільне використання цифрових інструментів для навчання.

4. Мотивація навчальної діяльності

Учням пропонується реальна ситуація планування маршруту безпілотної літачки на координатній площині. Виникає проблема: як визначити переміщення з початкової точки в кінцеву, не обчислюючи кожен етап руху окремо. Це спонукає до вивчення векторів та їх додавання як зручного математичного інструменту опису руху.

Проблемні запитання: «Як визначити найкоротший і найефективніший маршрут руху об'єкта на площині, не вимірюючи кожен крок окремо?»; «Чи можна спланувати рух дрона так, щоб він одразу потрапив у кінцеву точку, не виконуючи проміжних зупинок?»; «Чому два різні маршрути можуть приводити в одну й ту саму точку?»

5. Повне розв'язання

Крок 1.

На координатній площині будуємо точки: $A(-2; 1)$ – початкова точка (старт дрона); B – точка після першого переміщення; C – кінцева точка маршруту.

Вектори переміщення:

- перше переміщення описується вектором

$$\vec{a} = (4; 3)$$

- друге переміщення – вектором

$$\vec{b} = (-1; 5)$$

Вектор $\vec{a}$ будуємо від точки A , а вектор $\vec{b}$ – від точки B .

Крок 2. Знаходження координат точок B і C .

Координати точки B : Точка B є кінцем вектора $\vec{a}$, відкладеного від точки A :

$$B = (-2 + 4; 1 + 3) = (2; 4)$$

Отже, $B(2; 4)$.

Координати точки C : Точка C є кінцем вектора $\vec{b}$, відкладеного від точки B :

$$C = (2 - 1; 4 + 5) = (1; 9).$$

Отже, $C(1; 9)$.

Крок 3. Обчислення суми векторів переміщення:

Результуючий вектор дорівнює сумі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{a}(4; 3) + \vec{b}(-1; 5) = \vec{r}(3; 8).$$

Цей вектор описує загальне переміщення дрона від початкової точки A до кінцевої точки C без урахування проміжної точки B .

Крок 4. Перевірка: чи збігається вектор $\vec{r}$ з вектором $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}(1 - (-2); 9 - 1) = \overrightarrow{AC}(3; 8).$$

Порівнюємо:

$$\vec{r} = (3; 8), \quad \overrightarrow{AC} = (3; 8).$$



Отже, вектори збігаються.

Висновок: Додавання векторів дає змогу замінити кілька послідовних переміщень одним результируючим, що значно спрощує планування маршрутів. У реальному житті це дозволяє швидко визначати кінцеве положення об'єкта, не аналізуючи кожен окремий етап руху.

Крок 5. Альтернативний маршрут дрона.

Наприклад, можна запропонувати два інші вектори:

$$\vec{c} = (1; 4), \quad \vec{d} = (2; 4).$$

Тоді:

$$\vec{c} + \vec{d} = \vec{r}(1 + 2; 4 + 4) = \vec{r}(3; 8).$$

Отже, дрон може рухатися іншим маршрутом, але потрапить у ту саму кінцеву точку С, що підтверджує універсальність правила додавання векторів.

Висновок: Результат переміщення залежить лише від початкової та кінцевої точок, а не від шляху між ними.



6. Критерії оцінювання

<i>Рівень / Бали</i>	<i>[MAO 1] Дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів</i>	<i>[MAO 2] Моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язання проблемних ситуацій</i>	<i>[MAO 3] Критичне оцінювання процесу та результату розв'язання проблемних ситуацій</i>
Початковий 1–3 бали	Розпізнає окремі елементи ситуації (точки, вектори), але не формулює проблему або робить це з помилками	Виконує окремі дії за зразком, допускає помилки в побудовах або обчисленнях	Частково перевіряє результат або не пояснює його зміст
Середній 4–6 балів	Розуміє умову задачі, визначає початкову й кінцеву точки, частково пояснює, у чому полягає проблема	Будує модель (точки, вектори), але з неточностями; додає вектори з допомогою вчителя	Перевіряє результат, але пояснення неповне або формальне
Достатній 7–9 балів	Чітко формулює проблему (пошук результуючого переміщення), правильно інтерпретує ситуацію	Коректно будує координатну модель, знаходить координати точок і результуючий вектор	Перевіряє збіг векторів, робить логічний висновок щодо результату
Високий 10–12 балів	Самостійно аналізує ситуацію, формулює проблему та пропонує напрям її розв'язання	Самостійно моделює ситуацію, пропонує альтернативний маршрут, обґрунтовує вибір	Критично оцінює модель і результат, узагальнює, пояснює практичну цінність

7. Можливі варіанти диференціації

Базовий рівень: учні будують точки та вектори за готовими координатами, знаходять координати точок В і С за зразком.

Середній рівень: учні самостійно обчислюють результуючий вектор, перевіряють його збіг з вектором $\overrightarrow{AC}$.

Високий рівень: учні пропонують альтернативний маршрут, добирають інші вектори з тією самою сумою та пояснюють свій вибір.

8. Міжпредметна інтеграція

Географія: використання координатної сітки для визначення положення об'єктів на місцевості, аналогія між векторами переміщення та напрямками руху на карті, формування уявлень про маршрут, масштаб і орієнтування.

Інформатика: побудова координатної моделі маршруту в середовищі GeoGebra, алгоритмізація дій (послідовність переміщень), розвиток навичок роботи з цифровими інструментами та перевірки результатів.

Фізика: інтерпретація вектора як переміщення тіла, зв'язок між траєкторією руху та вектором переміщення, застосування векторів для опису руху в просторі.

Технології / STEM: моделювання руху безпілотних пристроїв, планування оптимального маршруту, усвідомлення ролі математики в інженерних і технологічних задачах.

Українська мова: коректне використання математичної термінології, формулювання усних і письмових пояснень, робота з точними формулюваннями без орфографічних помилок.

2.2.2. Оптимізація доставки

Авторка: *Науменко Інна Миколаївна, вчитель математики Золотоніської гімназії ім. С. Д. Скляренка Золотоніської міської ради Черкаської області*

Міська служба доставки аналізує ефективність маршруту службового автомобіля, який упродовж ранкового рейсу перевозить замовлення клієнтам у різних районах міста.



Місто має квартальну забудову, тому рух відбувається переважно вздовж напрямків північ–південь та схід–захід, але через ремонт дороги й затори водій змушений кілька разів змінювати напрям руху.

Автомобіль стартує зі складу в точці $O(0;0)$. Далі він здійснює п'ять послідовних переміщень:

Перший відрізок — рух на схід на 4 км (доставка першого замовлення).

Другий відрізок — рух на північ на 3 км (об'їзд затору).

Третій відрізок — рух на захід на 2 км (повернення до магістралі).

Четвертий відрізок — рух на південь на 5 км (доставка в спальний район).

П'ятий відрізок — рух на північний схід на $\sqrt{8}$ км (прямий шлях до останнього клієнта).

Керівник служби доставки аналізує маршрут, щоб:

- визначити фактичне переміщення автомобіля від складу до кінцевої точки;
- порівняти його з загальною довжиною пройденого шляху;
- оцінити витрати пального та зробити висновок, чи був маршрут економічно доцільним.

Завдання

- 1) Подайте кожен етап руху автомобіля у вигляді вектора $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5$ у координатній площині.
- 2) Запишіть координати кожного вектора.
- 3) Знайдіть координати суми векторів переміщення:
$$R = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 + \vec{v}_5$$
- 4) Визначте координати кінцевої точки маршруту.
- 5) Обчисліть:

- загальну довжину шляху, який проїхав автомобіль;
 - довжину вектора результуючого переміщення.
- 6) Порівняйте отримані значення та поясніть, чому вони відрізняються.
- 7) Фінансове завдання:
якщо автомобіль витрачає 8 л пального на 100 км, а ціна 1 л пального — 60 грн, обчисліть:
- фактичні витрати на цей маршрут;
 - витрати, які були б за умови руху найкоротшим шляхом.
- 8) Зробіть висновок:
- як вектори допомагають аналізувати рух у фізиці;
 - як математичні обчислення допомагають зменшувати фінансові витрати бізнесу.

Методичні рекомендації для вчителя

1. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

Після виконання завдання учень / учениця:

- пояснює поняття вектора, шляху та переміщення і розрізняє їх фізичний зміст;
- моделює реальну ситуацію руху в місті за допомогою векторів на координатній площині;
- додає вектори графічно й аналітично, визначає суму векторів переміщення;
- обчислює довжину вектора, загальну довжину шляху та координати кінцевої точки;
- інтерпретує результати обчислень у контексті реальної життєвої ситуації;
- оцінює ефективність маршруту та робить висновки щодо економії ресурсів;
- застосовує математичні знання для розв’язування міждисциплінарних (фізика, фінансова грамотність) задач;
- аргументує власні рішення та працює з цифровими інструментами (GeoGebra).

2. Перелік компетентностей, що формуються

- Математична компетентність: уміння працювати з векторами, координатами, довжиною вектора, виконувати обчислення та робити висновки.
- Природничо-наукова (фізична) компетентність: розуміння понять шлях і переміщення, аналіз руху в просторі.
- Фінансова грамотність і підприємливість: оцінювання витрат пального, аналіз ефективності маршрутів, прийняття економічно доцільних рішень.

- Інформаційно-цифрова компетентність: використання цифрових інструментів (GeoGebra) для моделювання та візуалізації.
- Уміння розв'язувати проблеми: застосування математичних моделей до реальних життєвих ситуацій.
- Навчання впродовж життя: перенесення набутих умінь на нові практичні задачі.

3. Перелік наскрізних вмінь, що формуються (soft skills)

- Критичне мислення: аналіз маршруту, зіставлення шляху та переміщення, оцінювання доцільності рішень.
- Розв'язування проблем: пошук оптимального способу руху в заданих умовах.
- Прийняття рішень: вибір економічно вигідного маршруту з урахуванням обмежень.
- Комунікація: усне й письмове пояснення ходу розв'язання та обґрунтування висновків.
- Співпраця: робота в парах або групах під час моделювання маршруту в GeoGebra.
- Ініціативність і відповідальність: усвідомлення наслідків обраних рішень (час, витрати, ресурси).
- Цифрова грамотність: використання цифрових інструментів для візуалізації та перевірки результатів.
- Самоорганізація та рефлексія: планування послідовності дій і оцінювання власної роботи.

4. Мотивація навчальної діяльності

Проблемне запитання: «Чому автомобіль, проїхавши майже 17–18 км містом, може опинитися лише за 4 км від складу, і як математика допомагає бізнесу не втрачати гроші на зайвих кілометрах?»

На перший погляд здається, що чим більше кілометрів проїхав автомобіль, тим далі він має опинитися від складу. Але в реальному місті через повороти, об'їзди та затори шлях і переміщення можуть суттєво відрізнятись. Сьогодні ми з'ясуємо, як вектори допомагають описати рух, знайти найкоротший маршрут і заощадити час та гроші.

5. Повне розв'язання

Дано:

Автомобіль стартує з точки $O(0; 0)$

Послідовні переміщення:

1. $\vec{v}_1$: 4 км на схід;
2. $\vec{v}_2$: 3 км на північ;
3. $\vec{v}_3$: 2 км на захід;
4. $\vec{v}_4$: 5 км на південь;
5. $\vec{v}_5$: $\sqrt{8}$ км на північний схід.



Витрата пального: 8 л / 100 км

Ціна пального: 60 грн / л

Крок 1.

Вісь Ox – схід (+) / захід (–)

Вісь Oy – північ (+) / південь (–)

$$\vec{v}_1 = (4; 0)$$

$$\vec{v}_2 = (0; 3)$$

$$\vec{v}_3 = (-2; 0)$$

$$\vec{v}_4 = (0; -5)$$

Рух на північний схід означає рівні проекції:

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \vec{v}_5$$

$$\vec{v}_5 = (2; 2)$$

Крок 2.

Знаходження суми векторів:

$$R = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 + \vec{v}_5$$

По осі Ox : $4 + 0 - 2 + 0 + 2 = 4$

По осі Oy : $0 + 3 + 0 - 5 + 2 = 0$

Отже: $\vec{R} = (4; 0)$

Крок 3.

Визначимо координати кінцевої точки: $O(0; 0) + \vec{R}(4; 0) = K(4; 0)$

Автомобіль опинився на 4 км на схід від складу.

Крок 4.

Знайдемо довжину фактичного шляху:

$$S = 4 + 3 + 2 + 5 + \sqrt{8}$$

$$\sqrt{8} \approx 2,8$$

$$S = 4 + 3 + 2 + 5 + 2,8 = 16,8 \text{ км}$$

Крок 5.

Обчислимо довжину переміщення:

$$|\vec{R}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4 \text{ км}$$

Крок 6.

Порівняємо отримані значення

Величина

Фактичний шлях

Переміщення

Значення

$\approx 16,8 \text{ км}$

4 км

Висновок (фізичний зміст):

- ✓ шлях залежить від траєкторії;
- ✓ переміщення залежить лише від початкової та кінцевої точок.

Крок 7.

Фінансові обчислення:

1. Фактичні витрати пального

$$\text{Пальне} = \frac{16,8 \cdot 8}{100} = 1,344 \text{ л}$$

6. Критерії оцінювання

<i>Рівень / Бали</i>	<i>[МАО 1] Дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів</i>	<i>[МАО 2] Моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язання проблемних ситуацій</i>	<i>[МАО 3] Критичне оцінювання процесу та результату розв'язання проблемних ситуацій</i>
Початковий 1–3 бали	Розпізнає окремі елементи ситуації, але не розуміє проблеми оптимізації маршруту	Зображає окремі вектори з помилками або без зв'язку між ними	Не може пояснити отриманий результат або робить необґрунтовані висновки
Середній 4–6 балів	Розуміє умову задачі, визначає, що проблему можна розв'язати за допомогою векторів	Моделює маршрут у координатній площині з незначними помилками, виконує додавання векторів	Порівнює шлях і переміщення, але пояснення частково формальні
Достатній 7–9 балів	Самостійно виокремлює проблему неефективного маршруту та формулює мету розв'язання	Коректно будує векторну модель, знаходить результуючий вектор, застосовує координатний метод	Обґрунтовано пояснює результат, робить висновки щодо ефективності маршруту
Високий 10–12 балів	Аналізує ситуацію, пропонує альтернативні підходи до оптимізації маршруту	Моделює процес без помилок, пропонує або обґрунтовує оптимальні стратегії руху	Критично оцінює результат, пов'язує його з реальними фінансовими наслідками, аргументує власну позицію

7. Можливі варіанти диференціації

Для учнів, які потребують підтримки (базовий рівень):

- Побудувати маршрут у GeoGebra за готовими координатами векторів.

- Знайти результуючий вектор переміщення.

- Порівняти шлях і переміщення без фінансових розрахунків.

Підтримка: покрокова інструкція, шаблон GeoGebra, підказки.

Для більшості учнів класу (достатній рівень):

- Самостійно подати рух автомобіля у вигляді векторів.

- Обчислити довжину шляху і переміщення.

- Розрахувати витрати пального та зробити висновок щодо ефективності маршруту.

Підтримка: опорна схема, алгоритм дій.

Для учнів з високим навчальним потенціалом (високий рівень):

- Запропонувати альтернативний маршрут з меншими витратами.
- Порівняти кілька маршрутів у GeoGebra.
- Зробити обґрунтований вибір найекономнішого варіанту.

Розширення: дослідницьке міні-завдання.

8. Міжпредметна інтеграція

Фізика: поняття шляху та переміщення, аналіз руху тіла в просторі, зв'язок напрямку руху з векторною моделлю.

Фінансова грамотність: розрахунок витрат пального, оцінювання економічної доцільності маршруту, усвідомлення впливу математичних рішень на фінансові результати.

Інформатика: використання цифрових інструментів (GeoGebra), візуалізація даних і моделей, робота з цифровими середовищами для дослідження.

Географія: орієнтування на місцевості (сторони горизонту), робота з планом міста, масштабом, просторове мислення.

Громадянська та соціальна галузь: раціональне використання ресурсів, відповідальність за прийняті рішення, усвідомлення ролі оптимізації процесів у житті громади.

2.2.3. Планування евакуації в школі

Авторка: *Науменко Інна Миколаївна, вчитель математики Золотоніської гімназії ім. С. Д. Скляренка Золотоніської міської ради Черкаської області*

У школі потрібно провести планову навчальну евакуацію на випадок надзвичайної ситуації (пожежа, землетрус, загроза обстрілу тощо). Мета



тренування — швидко та безпечно вивести учнів з будівлі за заздалегідь визначеними маршрутами.

Координатор евакуації сплановує найефективніші маршрути виходу учнів із 2 та 3 поверхів до пункту збору у шкільному дворі.

Для моделювання ситуації використано координатну площину.

Пункт збору прийнято за початок координат $O(0; 0)$.

Ключові точки плану школи		
Об'єкт	Позначення	Координати
Пункт збору	O	$(0; 0)$
Головний вихід	G	$(4; 2)$
Запасний вихід	Z	$(-3; 1)$
Сходи А	S_1	$(2; 6)$
Сходи Б	S_2	$(-2; 5)$

Кабінети

Кабінет	Позначення	Координати
II поверх		
2-А	A_2	$(3; 8)$
2-Б	B_2	$(-1; 7)$
III поверх		
3-А	A_3	$(4; 10)$
3-Б	B_3	$(-3; 9)$

Завдання

1. Побудуйте на координатній площині всі задані точки.
2. Для кожного кабінету запропонуйте маршрут евакуації:
 - від кабінету $\rightarrow$ до сходів $\rightarrow$ до виходу $\rightarrow$ до пункту збору.
3. Запишіть маршрут у вигляді суми векторів.
4. Знайдіть координати кожного вектора маршруту.
5. Обчисліть довжину повного маршруту для:

- учнів 2 поверху;
 - учнів 3 поверху.
6. Порівняйте маршрути через:
- сходи S_1 та вихід G;
 - сходи S_2 та вихід Z.
7. Зробіть висновок:
- який маршрут є найкоротшим;
 - який — доцільнішим для масової евакуації.

Методичні рекомендації для вчителя

1. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

Після виконання завдання учень / учениця:

- пояснює поняття вектора на площині, його напрям, координати та модуль;
- розуміє геометричний і координатний способи задання вектора;
- усвідомлює зв'язок між координатами точок і відповідними векторами переміщення;
- будує точки та вектори на координатній площині за заданими координатами;
- знаходить координати вектора між двома точками;
- обчислює довжину вектора та загальну довжину маршруту;
- моделює реальну життєву ситуацію (евакуацію) за допомогою векторів;
- порівнює альтернативні маршрути та обирає оптимальний на основі обчислень;
- логічно обґрунтовує вибір маршруту евакуації;
- аналізує отримані числові результати та робить висновки;
- пояснює математичні дії усно та/або письмово, використовуючи математичну мову;
- працює в парі або групі, аргументовано відстоює власну позицію.

2. Перелік компетентностей, що формуються

- Математична компетентність: застосування векторів і координат для розв'язування практичної життєвої задачі.
- Громадянська компетентність: усвідомлення відповідальності за безпеку власну та інших у надзвичайних ситуаціях.
- Соціальна компетентність: уміння співпрацювати, узгоджувати дії та приймати спільні рішення.
- Ініціативність і підприємливість: вибір оптимального маршруту на основі аналізу та обґрунтування.
- Уміння вчитися впродовж життя: самооцінювання результатів діяльності та рефлексія.

- Екологічна та безпекова грамотність: дотримання правил безпечної поведінки в умовах ризик

3. Перелік наскрізних вмінь, що формуються (soft skills)

- Критичне мислення: аналіз маршрутів, порівняння варіантів, вибір оптимального рішення.

- Уміння розв'язувати проблеми: пошук ефективного виходу з практичної ситуації.

- Командна взаємодія: узгодження дій у парі або групі.

- Комунікація: аргументоване пояснення власного рішення.

- Прийняття рішень: відповідальний вибір маршруту з урахуванням безпеки.

- Емоційна стійкість: збереження раціональності мислення в умовах стресу.

- Рефлексія та самооцінювання: усвідомлення власних досягнень і труднощів.

4. Мотивація навчальної діяльності

Уявіть, що у школі раптово лунає сигнал евакуації. У коридорах багато людей, час обмежений, а від кожного правильного рішення залежить безпека всіх. Чи достатньо просто йти за натовпом? Чи можна заздалегідь прорахувати найкращий маршрут і зменшити ризики?

Проблемне запитання: Як за допомогою математики (поняття векторів) заздалегідь визначити такий маршрут евакуації, який буде безпечним і ефективним для всіх?

5. Повне розв'язання

Крок 1. Вихідні дані.

Пункт збору: $O(0; 0)$.

Сходи: $S_1(2; 6)$, $S_2(-2; 5)$.

Виходи: $G(4; 2)$, $Z(-3; 1)$.

Кабінети:

- 2 поверх: $A_2(3; 8)$, $B_2(-1; 7)$.

- 3 поверх: $A_3(4; 10)$, $B_3(-3; 9)$.

Крок 2. Формула координат та довжини вектора.

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A);$$

довжина:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Крок 3. Евакуація з 2 поверху.

I. Кабінет $A_2(3; 8)$

Маршрут 1: через $S_1 \rightarrow G \rightarrow O$

1. $\overrightarrow{A_2S_1} = (-1; -2)$,

$$|\overrightarrow{A_2S_1}| = \sqrt{5};$$

$$2. \quad \overrightarrow{S_1 G} = (2; -4),$$

$$|\overrightarrow{S_1 G}| = \sqrt{20};$$

$$3. \quad \overrightarrow{G O} = (-4; -2),$$

$$|\overrightarrow{G O}| = \sqrt{20}.$$

Загальна довжина: $\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{20} \approx 11,18$.

Маршрут 2: через $S_2 \rightarrow Z \rightarrow O$

$$1. \quad \overrightarrow{A_2 S_2} = (-5; -3),$$

$$|\overrightarrow{A_2 S_2}| = \sqrt{34};$$

$$2. \quad \overrightarrow{S_2 Z} = (-1; -4),$$

$$|\overrightarrow{S_2 Z}| = \sqrt{17};$$

$$3. \quad \overrightarrow{Z O} = (3; -1),$$

$$|\overrightarrow{Z O}| = \sqrt{10}.$$

Загальна довжина: $\sqrt{34} + \sqrt{17} + \sqrt{10} \approx 13,1$.

Оптимальний маршрут з кабінету A_2 через S_1 і G .

II. Кабінет $B_2(-1; 7)$

Через $S_1 \rightarrow G \rightarrow O$

$$|\overrightarrow{B_2 S_1}| = \sqrt{10}, \quad |\overrightarrow{S_1 G}| = \sqrt{20}, \quad |\overrightarrow{G O}| = \sqrt{20}.$$

Разом $\approx 12,6$.

Через $S_2 \rightarrow Z \rightarrow O$

$$|\overrightarrow{B_2 S_2}| = \sqrt{5}, \quad |\overrightarrow{S_2 Z}| = \sqrt{17}, \quad |\overrightarrow{Z O}| = \sqrt{10}.$$

Разом $\approx 9,5$.

Оптимальний маршрут з кабінету B_2 через S_2 і Z .

Крок 4. Евакуація із 3 поверху.

I. Кабінет $A_3(4; 10)$

Через $S_1 \rightarrow G \rightarrow O$

$$|\overrightarrow{A_3 S_1}| = \sqrt{20}, \quad |\overrightarrow{S_1 G}| = \sqrt{20}, \quad |\overrightarrow{G O}| = \sqrt{20}.$$

Разом $\approx 13,4$.

Через $S_2 \rightarrow Z \rightarrow O$

$$|\overrightarrow{A_3 S_2}| = \sqrt{85}, \quad |\overrightarrow{S_2 Z}| = \sqrt{17}, \quad |\overrightarrow{Z O}| = \sqrt{10}.$$

Разом $\approx 16,5$.

Оптимальний маршрут з кабінету A_3 через S_1 і G .

II. Кабінет $B_3(-3; 9)$

Через $S_1 \rightarrow G \rightarrow O$

$$|\overrightarrow{B_3 S_1}| = \sqrt{26}, \quad |\overrightarrow{S_1 G}| = \sqrt{20}, \quad |\overrightarrow{G O}| = \sqrt{20}.$$

Разом $\approx 13,6$.

Через $S_2 \rightarrow Z \rightarrow O$

$$|\overrightarrow{B_3 S_2}| = \sqrt{17}, \quad |\overrightarrow{S_2 Z}| = \sqrt{17}, \quad |\overrightarrow{Z O}| = \sqrt{10}.$$

Разом $\approx 10,5$.

Оптимальний маршрут з кабінету B_3 через S_2 і Z .

Крок 5. Узагальнююча таблиця

Кабінет	Найкращий маршрут	Довжина
A_2	$S_1 \rightarrow G \rightarrow O$	$\approx 11,2$
B_2	$S_2 \rightarrow Z \rightarrow O$	$\approx 9,5$
A_3	$S_1 \rightarrow G \rightarrow O$	$\approx 13,4$
B_3	$S_2 \rightarrow Z \rightarrow O$	$\approx 10,5$

Крок 6. Висновок (громадянська та соціальна компетентність)

Математичне моделювання показало, що:

- універсального маршруту для всіх не існує;
- оптимальна евакуація потребує розподілу потоків людей;
- раціональне планування зменшує ризики паніки та скупчення.



6. Критерії оцінювання

<i>Рівень / Бали</i>	<i>[МАО 1] Дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів</i>	<i>[МАО 2] Моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язання проблемних ситуацій</i>	<i>[МАО 3] Критичне оцінювання процесу та результату розв'язання проблемних ситуацій</i>
Початковий 1–3 бали	Визначає окремі елементи ситуації без усвідомлення проблеми	Частково будує модель, допускає суттєві помилки	Формулює висновок без пояснення
Середній 4–6 балів	Розуміє умову, визначає мету евакуації, але без аргументації	Коректно будує модель, але не всі обчислення правильні	Робить висновок з частковим обґрунтуванням
Достатній 7–9 балів	Виокремлює проблему, визначає ключові точки та можливі маршрути	Правильно будує вектори, обчислює довжини маршрутів	Обґрунтовано пояснює результат, робить висновки щодо ефективності маршруту
Високий 10–12 балів	Чітко формулює проблему, обґрунтовує необхідність різних маршрутів	Моделює кілька маршрутів, порівнює та обирає оптимальний	Аргументовано оцінює рішення та пропонує рекомендації

7. Можливі варіанти диференціації

Для учнів базового рівня:

- побудувати на координатній площині задані точки (кабінет, сходи, вихід, пункт збору);
- побудувати один маршрут евакуації з 2 або 3 поверху;
- знайти координати векторів переміщення;
- обчислити довжину кожного вектора маршруту.

Для учнів достатнього рівня:

- побудувати два альтернативні маршрути евакуації;
- записати маршрути у вигляді суми векторів;
- обчислити повну довжину кожного маршруту;
- порівняти маршрути та визначити ефективніший.

Для учнів високого рівня знань:

- змоделювати евакуацію для кількох класів одночасно;
- запропонувати розподіл потоків учнів між різними маршрутами;
- оцінити не лише довжину, а й безпеку та доцільність маршруту;
- сформулювати рекомендації для адміністрації школи.

8. Міжпредметна інтеграція

Громадянська освіта / «Захист України»: формування відповідальної поведінки під час надзвичайних ситуацій, знання правил евакуації, усвідомлення цінності людського життя та спільної відповідальності.

Основи здоров'я: безпечна поведінка в умовах стресу, запобігання паніці, збереження фізичного та психоемоційного здоров'я під час евакуації.

Географія: орієнтування на місцевості, робота з планами та схемами, використання координатної сітки, аналіз просторового розміщення об'єктів.

Інформатика: побудова схем маршрутів у цифрових середовищах (Canva, GeoGebra, Google Drawings), візуалізація даних, алгоритмізація дій.

Фізика: поняття переміщення, напрямку руху, швидкості, оцінка часу проходження маршруту (за умови введення додаткових даних).

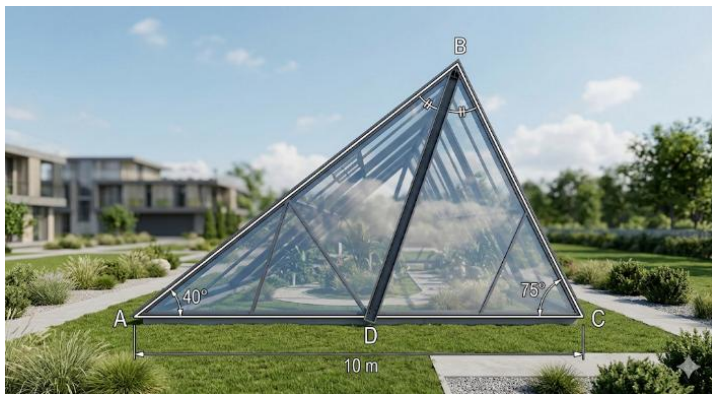
Українська мова: формулювання чітких інструкцій, усне й письмове аргументування рішень, розвиток логічного мовлення.

2.3. Трикутник під мікроскопом: шукаємо невідоме

2.3.1. Реконструкція купольної оранжереї

Авторка: *Гонза Валерія Євгенівна, вчитель математики Черкаської гімназії №9 ім. О. М. Луценка Черкаської міської ради Черкаської області*

Архітектурне бюро розробляє проєкт скляного павільйону, фасадна частина якого має форму трикутника ABC. Через особливості ландшафту та



фундаменту, трикутник є різностороннім: сторона AC (основа на землі) = 10 метрів. Кут нахилу лівої стійки AB до землі становить 40° . Кут нахилу правої стійки BC до землі становить 75° . Для забезпечення жорсткості конструкції всередині

встановлюється

підсилювальна балка BD, яка з'єднує вершину B з точкою D на основі AC так, що вона є бісектрисою кута B.

Завдання

1. Повний розрахунок кутів: визначте величину кута B. Обчисліть кути, під якими внутрішня балка BD нахилена до бічних стійок AB та BC.
2. Розрахунок тримальних конструкцій: обчисліть довжини бічних стійок AB та BC. (Використовуйте теорему синусів).
3. Визначення довжини підсилювача: обчисліть довжину внутрішньої балки BD. Підказка: спочатку знайдіть відрізки AD і DC, на які бісектриса ділить основу, або скористайтесь теоремою синусів для трикутника ABD.
4. Енергоефективність (площа): обчисліть площу скління фасаду (ABC). Якщо вартість енергоощадного скла становить 1800 грн/м², а бюджет на скління обмежений сумою 80 000 грн, чи вкладеться замовник у бюджет?
5. Інженерний виклик: Визначте висоту павільйону BH. Як зміниться площа скління, якщо для збільшення внутрішнього простору кут A збільшити до 50° , залишивши основу AC незмінною? (Дайте якісну оцінку).

Методичні рекомендації для вчителя

I. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

- учень/учениця будує математичну модель реального об'єкта (фасаду споруди) у вигляді довільного трикутника, ідентифікуючи його елементи (сторони, кути, бісектрису);

- застосовує теорему синусів та теорему про суму кутів трикутника для знаходження невідомих лінійних та кутових величин;
- використовує властивості бісектриси кута або додаткові тригонометричні співвідношення для розрахунку внутрішніх конструктивних елементів;
- обчислює площу трикутника за різними формулами (через дві сторони і кут між ними або сторону та прилеглі кути) для вирішення економічного питання;
- інтерпретує отримані результати (метри, квадратні метри, гривні) у контексті будівельного проєкту.

Предметна компетентність (математична):

- пояснює зміст моделі: як зміна кута нахилу стійок впливає на висоту та площу скління споруди;
- складає алгоритм розв'язання: від знаходження невідомого кута до розрахунку сторін та площ;
- знаходить значення тригонометричних функцій для нетабличних кутів (40° , 75°), використовуючи калькулятор або таблиці;
- моделює фінансовий ризик: порівнює розраховану вартість матеріалів із наявним бюджетом.

II. Ключові компетентності

1. Компетентність у природничих науках і технологіях:

- розуміє принципи статички: як внутрішня балка (бісектриса) допомагає розподілити навантаження в конструкції;
- аналізує вибір матеріалів (енергоощадне скло) як технологічне рішення для терморегуляції в оранжереї.

2. Інноваційність (підприємливість та фінансова грамотність):

- управління бюджетом: зіставляє результати геометричних обчислень (площа скління) із ринковими цінами на матеріали;
- оптимізація: аналізує те, як зміна параметрів (наприклад, кута α) змінить витрати на матеріали.

3. Інформаційно-комунікаційна компетентність (ІКТ):

- цифрові обчислення: використовує інженерний калькулятор або спеціалізоване ПЗ для перевірки точності складних тригонометричних розрахунків.

4. Екологічна компетентність:

- сталий розвиток: розуміє важливість точних розрахунків для мінімізації будівельних відходів (залишків скла та металу);
- енергоефективність: оцінює переваги використання енергоощадного скла, що згадується в умові, для збереження тепла в оранжереї.

5. Навчання впродовж життя:

- самостійний пошук шляхів: здатність учня знайти необхідні значення синусів/косинусів у довідниках або таблицях Брадіса;

- корекція помилок: вміння перевірити логічність отриманої відповіді (наприклад, чи не виявилася бічна сторона довшою за суму двох інших).

III. Наскрізнi вміння

- читання з розумінням: здатність виокремити ключові геометричні параметри (довжина основи, градусна міра кутів) із розлогого архітектурного опису; розуміння значення слів «фасад», «бісектриса», «кошторис» та їхнього безпосереднього зв'язку з елементами трикутника.

- логічне обґрунтування: обґрунтування того, чому для розрахунку бічних стійок доцільно використовувати саме теорему синусів (наявність сторони та двох прилеглих до неї кутів); пояснення, як збільшення кута нахилу стійки впливає на загальну висоту споруди та об'єм необхідного скла.

- розв'язування проблем: формулювання остаточної відповіді про доцільність реконструкції на основі математичних фактів.

- конструктивне керування емоціями та співпраця: здатність повернутися до початку розрахунків, якщо отримана площа призвела до значного перевищення бюджету; (У разі групового виконання) вміння розподілити ролі: «архітектор» (будує креслення), «інженер» (рачує сторони), «економіст» (рачує кошторис).

- здатність до інновацій: усвідомлення того, що використання енергоощадного скла — це інвестиція, яка з часом окупиться за рахунок економії на опаленні, навіть якщо зараз бюджет обмежений.

Повне розв'язання

Крок 1. Знаходження кута B та кутів бісектриси.

За теоремою про суму кутів трикутника:

$$\angle B = 180 - (40 + 75) = 65^\circ$$

Оскільки BD – бісектриса, то вона ділить кут B навпіл:

$$\angle ABD = \angle CBD = 65:2 = 32,5^\circ$$

Крок 2. Розрахунок бічних стійок.

За теоремою синусів для $\triangle ABC$:

$$\frac{AB}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin C}$$

Знаходимо AB :

$$AB = \frac{AC \cdot \sin 75^\circ}{\sin 65^\circ} \approx \frac{10 \cdot 0,966}{0,906} \approx 10,66 \text{ м}$$

Знаходимо BC :

$$BC = \frac{AC \cdot \sin 40^\circ}{\sin 65^\circ} \approx \frac{10 \cdot 0,643}{0,906} \approx 7,10 \text{ м}$$

Крок 3. Розрахунок внутрішньої балки BD.

Розглянемо $\triangle ABD$. У ньому відомо:

$AB \approx 10,66 \text{ м}$, $\angle A = 40^\circ$, $\angle ABD = 32,5^\circ$. Знайдемо третій кут $\angle ADB$:

$$\angle ADB = 180 - (40 + 32,5) = 107,5^\circ$$

За теоремою синусів для $\triangle ABD$:

$$BD = \frac{AB \cdot \sin 40^\circ}{\sin 107,5^\circ} \approx \frac{10,66 \cdot 0,643}{0,954} \approx 7,19 \text{ м}$$

Крок 4. Обчислення площі скління (S).

Використаємо формулу площі через дві сторони і кут між ними:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A$$

$$S = 0,5 \cdot 10,66 \cdot 10 \cdot \sin 40^\circ \approx 53,3 \cdot 0,643 \approx 34,27 \text{ м}^2$$

Крок 5. Фінансовий розрахунок.

Вартість = Площа · Ціна за м^2

$$\text{Вартість} = 34,27 \cdot 1800 = 61686 \text{ грн}$$

Крок 6. Аналіз бюджету.

Розрахункова вартість скління становить 61 868 грн, що менше за ліміт у 80 000 грн. Висновок: замовник вкладається в бюджет, залишається резерв у 18 314 грн на монтажні роботи.

Крок 7. Інженерний виклик.

Висота $BH = AB \cdot \sin 40^\circ \approx 10,66 \cdot 0,643 \approx 6,85 \text{ м}$.

Якщо кут A збільшити до 50° , вершина B «підніметься» вище (при незмінній основі), що призведе до збільшення площі скління та вартості проекту.

Орієнтовні критерії оцінювання

Рівень	Бали	[MAO 1] Дослідження та виокремлення проблем	[MAO 2] Моделювання та розроблення стратегій	[MAO 3] Критичне оцінювання результату
Початковий	1 – 3	Розпізнає в умові трикутник, але не може правильно співвіднести дані (АС, кут А, кут С) з його елементами.	Потребує постійної допомоги для вибору формули. Робить хаотичні записи без чіткої стратегії.	Називає випадкові числа як відповідь. Не може пояснити, чи встигає замовник у бюджет.

Середній	4 – 6	Виокремлює основні дані, правильно будує схематичне креслення. Розуміє, що треба знайти кут В.	Записує теорему синусів, але припускається помилок у тригонометричних розрахунках або перетвореннях формул.	Отримує результат, але не може його аргументувати. Оцінка бюджету формальна (без порівняння).
Достатній	7 – 9	Самостійно аналізує умову, правильно класифікує задачу як розв'язування довільного трикутника.	Складає повний план: знаходження кут В, сторін АВ, ВС та площі S. Правильно використовує калькулятор для $\sin 40^\circ$ тощо.	Робить правильний висновок щодо бюджету. Обґрунтовує вибір теореми синусів для цієї ситуації.
Високий	10 – 12	Повною мірою досліджує зв'язки між елементами (напр., роль бісектриси BD). Бачить структуру задачі в цілому.	Реалізує складну стратегію (обчислення BD через трикутник ABD). Дотримується точності округлень.	Здійснює рефлексію: аналізує, як зміна кута А вплине на вартість. Дає розгорнуту пораду замовнику щодо залишку коштів.

Можливі варіанти диференціації

Для учнів, які потребують підтримки: Замість різностороннього трикутника варто обрати рівнобедрений; замінити кути задачі на 30° , 45° або 60° ; надати формулу площі трикутника.

Базовий рівень: стандартний розв'язок задачі.

Для сильних учнів: Додайте в умову параметр глибини споруди (наприклад, оранжерея має довжину 15 метрів). Завданням учнів буде не лише розрахунок площі фасаду, а й обчислення загального об'єму повітря всередині призми. Це дозволяє додати фізичний складник: розрахувати необхідну потужність системи опалення, знаючи, що для підтримки мікроклімату потрібно 1 кВт енергії на кожні 30 м^3 об'єму.

2.3.2. Реконструкція паркової зони: острівна альтанка

Авторка: *Гонза Валерія Євгенівна, вчитель математики Черкаської гімназії №9 ім. О. М. Луценка Черкаської міської ради Черкаської області*

У межах проєктування нового міського парку архітектори планують з'єднати два оглядові майданчики А та В пішохідним містком. Між



майданчиками розташоване невелике декоративне озеро, тому пряме вимірювання відстані між ними на місцевості неможливе. Геодезист обрав допоміжну точку С на березі, з якої видно обидва майданчики, і провів необхідні заміри

для розрахунку довжини містка. Відстань від точки С до майданчика А становить 40 м. Відстань від точки С до майданчика В становить 65 м. Кут між напрямками СА та СВ дорівнює 120° .

Завдання

1. Геометричне моделювання: побудуйте схематичне креслення ситуації. Визначте довжину містка АВ, скориставшись теоремою косинусів.
2. Проєктування огорожі: для безпеки на майданчиках А та В потрібно встановити кутові кріплення. Обчисліть величину кутів А та В трикутника АВС, щоб замовити деталі з правильним кутом розвороту (округліть до цілих градусів).
3. Економічне обґрунтування: будівельна компанія надала кошторис, де вказано, що вартість 1 погонного метра містка становить 8 500 грн. Обчисліть загальну вартість матеріалів для будівництва містка.
4. Екологічний моніторинг: знайдіть площу ділянки озера (трикутник АВС), яка опиниться безпосередньо під конструкціями та в зоні робіт, щоб оцінити вплив на водну флору.

Методичні рекомендації для вчителя

I. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

- учень/учениця створює математичну модель реальної ситуації у вигляді трикутника, ідентифікуючи об'єкти на місцевості як вершини та сторони геометричної фігури;
- застосовує ефективний метод розв'язування трикутника (теорему косинусів чи синусів) залежно від відомих даних;

- обчислює довжини сторін та міри кутів, використовуючи тригонометричні функції, та округлює результати з урахуванням практичної доцільності;

- аналізує отримані результати (наприклад, вартість містка або площу робіт) та співвідносить їх із реальними потребами (бюджет громади, екологічні норми);

- оцінює вплив інженерних рішень на довкілля (через розрахунок площі ділянки, що підлягає забудові).

Предметна компетентність (математична):

- учень/учениця будує графічну модель (схематичне креслення) за текстовим описом та реалістичним зображенням, ідентифікуючи об'єкти (майданчики, точки спостереження) як вершини трикутника;

- встановлює зв'язки між реальними об'єктами та їхніми геометричними характеристиками (відстань — довжина сторони, кут огляду — градусна міра кута);

- застосовує теорему косинусів для знаходження невідомої сторони трикутника (AB) за двома відомими сторонами та кутом між ними;

- використовує формули площі трикутника обчислення площі робочої зони;

- аналізує отримані цифрові дані в контексті реальності: оцінює, наскільки логічною є отримана довжина містка відносно вхідних даних.

II. Ключові компетентності

1. Компетентність у природничих науках і технологіях:

- розуміє принцип роботи вимірювальних приладів (тахеометра, лазерної рулетки);

- оцінює технічні параметри конструкцій (міцність, кути нахилу, довжина прольотів);

- формує науковий світогляд через усвідомлення того, що закони геометрії є основою для будь-якого інженерного проектування.

2. Інформаційно-комунікаційна компетентність (ІКТ):

- опрацьовує дані: видобуває потрібні дані з візуального контенту (фотографії парку) та текстового опису;

- використовує цифрові інструменти (калькулятор, онлайн-таблиці) для швидкого й точного знаходження значень.

3. Екологічна компетентність:

- усвідомлює вплив людської діяльності на довкілля; розрахунок площі (S), яка буде задіяна під будівництво, допомагає зрозуміти масштаб втручання в екосистему озера);

- формує відповідальне ставлення до ресурсів під час проектування зони відпочинку.

4. Підприємливість та фінансова грамотність:

- здатність розрахувати кошторис проєкту: переведення геометричних одиниць (метрів) у грошовий еквівалент (вартість будівництва);

- планування ресурсів на основі точних математичних розрахунків, що мінімізує витрати матеріалів.

5. Громадянська та соціальна компетентності:

- розуміння важливості створення якісної інфраструктури для громади (центр незламності, парк, містки);
- здатність працювати над проектом, що має суспільне значення, та усвідомлення своєї ролі як майбутнього фахівця, що змінює простір навколо себе.

III. Наскрізні вміння

- читання з розумінням: здатність вихопити з текстового опису ключові параметри (АС, ВС та кут С) та відокремити їх від художнього опису парку;

- вміння висловлювати власну думку: обґрунтування вибору математичного методу: учень має пояснити, чому для розв'язання цієї ситуації він обрав саме теорему косинусів, а не, наприклад, властивості прямокутного трикутника;

- критичне та системне мислення: перевірка отриманої відповіді на відповідність реальності; якщо розрахована довжина містка вийде меншою за 25 м або більшою за 110 м (враховуючи нерівність трикутника), учень має зрозуміти, що в обчисленнях є помилка;

- здатність логічно обґрунтовувати позицію: доведення того, що розрахована вартість проекту (завдання №3) є об'єктивною і базується на точних геометричних вимірах.

Повне розв'язання

Крок 1. Геометричне моделювання

Згідно з умовою задачі та фотофіксацією місцевості, будемо математичну модель у вигляді довільного трикутника АВС, де:

- точка С – місцезнаходження геодезиста з тахеометром;
- точка А – перший оглядовий майданчик;
- точка В – другий оглядовий майданчик;
- сторони АС = 40 м, ВС = 65 м;
- кут між ними С = 120°;
- відрізок АВ – майбутній пішохідний місток.

Крок 2. Обчислення довжини містка.

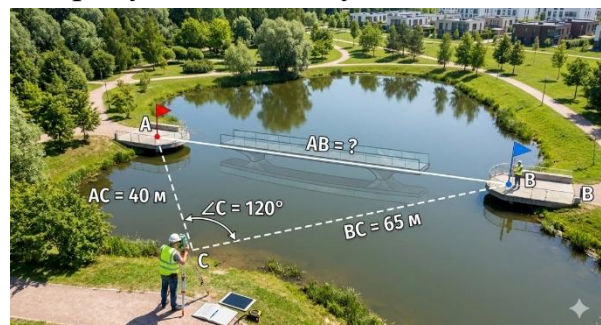
Оскільки відомі дві сторони трикутника і кут між ними, використовуємо теорему косинусів:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos C$$

Підставляємо значення:

$$AB^2 = 40^2 + 65^2 - 2 \cdot 40 \cdot 65 \cdot \cos 120^\circ$$

$$AB^2 = 1600 + 4225 - 5200 \cdot (-0,5)$$
$$AB^2 = 5825 + 2600$$



$$AB^2 = 8425$$

$$AB = \sqrt{8425} \approx 91,787 \dots$$

Отже, довжина містка $AB \approx 91,8$ м.

Крок 3. Проектування кутів кріплення.

Для знаходження $\angle A$ та $\angle B$ скористаємося теоремою синусів:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$$

$$\frac{91,8}{\sin 120^\circ} = \frac{65}{\sin A}$$

$$\sin A = \frac{65 \cdot 0,866}{91,8} \approx 0,613$$

$$\angle A \approx 37,8^\circ \approx 38^\circ$$

Знаходимо третій кут:

$$\angle B \approx 180 - (120 + 38) \approx 22^\circ$$

Крок 4. Економічне обґрунтування.

Обчислюємо вартість матеріалів для будівництва містка:

Довжина містка – 91,8 м.

Ціна за 1 метр – 8500 грн.

$$91,8 \cdot 8500 = 780\,300 \text{ грн}$$

Крок 5. Екологічний моніторинг.

Обчислюємо площу трикутної ділянки ABC за формулою:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin C$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 65 \cdot \sin 120^\circ$$

$$S = 20 \cdot 65 \cdot 0,866$$

$$S = 1300 \cdot 0,866 = 1125,8 \approx 1126 \text{ м}^2$$

Площа зони робіт становить приблизно 1126 м².

Орієнтовні критерії оцінювання

Рівень	Бали	[МАО 1] Дослідження та виокремлення проблем	[МАО 2] Моделювання та розроблення стратегій	[МАО 3] Критичне оцінювання результату
Початковий	1 – 3	Розпізнає об'єкти на фото, але не може виділити математичні дані.	Відтворює фрагменти формул (напр., лише теорему Піфагора), не пов'язуючи їх із задачею.	Подає відповідь без математичного обґрунтування або коментарів.
Середній	4 – 6	Виокремлює основні дані (АС, ВС, кут С) з тексту та фото за	Будує трикутник, обирає теорему косинусів, але допускає помилки в обчисленнях.	Записує відповідь, але не може пояснити її практичне значення (напр.,

		допомогою вчителя.		навіщо знати площу).
Достатній	7 – 9	Самостійно ідентифікує проблему та будує схематичне креслення трикутника за фото.	Правильно застосовує теореми косинусів та синусів. Знаходить довжину містка та кути з правильним округленням.	Оцінює реалістичність результату. Розраховує кошторис та площу, розуміючи їх прикладний зміст.
Високий	10 – 12	Аналізує ситуацію, виявляючи всі зв'язки (геодезичні, інженерні, фінансові).	Демонструє повний цикл розв'язання. Обирає раціональні стратегії обчислень. Пропонує варіанти перевірки результату.	Робить розгорнутий експертний висновок. Обґрунтовує доцільність витрат та екологічні ризики на основі розрахунків.

Можливі варіанти диференціації

Для учнів, які потребують підтримки: учню надається заготовка креслення (скелет трикутника), де вже позначені вершини А, В, С; для обчислення довжини містка учню надається «формула з пропусками»; якщо учню важко працювати з великими числами, можна округлити довжину містка до цілого числа (наприклад, 92 м) перед множенням на вартість.

Базовий рівень: замість самостійного вибору даних, запропонуйте учням заповнити «Паспорт об'єкта» (Відстань від геодезиста до точки А: _____ м. Відстань від геодезиста до точки В: _____ м. Кут, під яким геодезист бачить обидва майданчики: _____°); надайте учням частково заповнену схему та покрокову інструкцію.

Для сильних учнів:

- учням пропонується не просто констатувати дані, а проаналізувати їх точність. Завдання: Припустимо, що під час замірів виникла похибка в 1 метр при вимірюванні сторони ВС (тобто вона може бути від 64 до 66 метрів). Як ця похибка вплине на кінцеву довжину містка АВ?

- критичне оцінювання впливу на середовище. Завдання: запропонуйте, як зміниться площа зони робіт, якщо ми вирішимо змінити кут 120° на 90° (зберігаючи довжини сторін берега). Чи зменшиться при цьому втручання в екосистему?

2.3.3. Дизайнерська склянка Anti-Roll

Авторка: *Гонза Валерія Євгенівна, вчитель математики Черкаської гімназії №9 ім. О. М. Луценка Черкаської міської ради Черкаської області*

Студія промислового дизайну розробляє склянку для використання в поїздах та на кораблях. Головна особливість — поперечний переріз склянки



має форму трикутника із закругленими кутами. Це гарантує, що при падінні склянка зупиниться на одній із граней і не покотиться по підлозі. Технічне завдання передбачає, що основа склянки має бути трикутною. Для стійкості та зручності тримання в руці дизайнер обрав такі параметри основи: одна сторона 7 см, друга – 8 см, кут між ними складає 60° .

Завдання:

1. Математична модель: обчисліть довжину третьої сторони основи (с), щоб передати дані у відділ

3D-моделювання.

2. Перевірка ергономіки (кути): для того, щоб склянка була зручною, кути не повинні бути занадто гострими. Знайдіть градусну міру двох інших кутів трикутника (α та β).

3. Витрати матеріалу: обчисліть площу основи склянки. Це необхідно для розрахунку кількості скляної маси, що піде на виготовлення дна.

4. Висновок: чи можна таку склянку назвати «правильною» (рівносторонньою) чи рівнобедреною? Обґрунтуйте відповідь на основі розрахунків.

Методичні рекомендації для вчителя

I. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

- застосовує теорему косинусів для знаходження невідомої сторони трикутника за двома сторонами і кутом між ними;
- використовує теорему синусів або наслідки з теореми косинусів для обчислення невідомих кутів трикутника;
- обирає оптимальну формулу для знаходження площі трикутника (у даному випадку через дві сторони та синус кута між ними);
- проводить обчислення з використанням калькулятора або таблиць, округлюючи результати до заданої точності (що важливо для інженерних завдань).

Предметна компетентність (математична):

- учень/учениця створює схематичне креслення (трикутник) на основі текстового опису технічного завдання та візуального зображення дизайнерського виробу, ідентифікуючи ребра склянки як сторони трикутника, а стики граней — як його вершини;
- інтерпретує технічні параметри виробу через геометричні характеристики (ширина грані склянки — довжина сторони трикутника, нахил граней — градусна міра кутів);
- обирає та реалізує алгоритм розв'язання трикутника, зокрема застосовує теорему косинусів для знаходження невідомої довжини третьої грані (с) за двома заданими сторонами та кутом між ними;
- використовує відповідні формули площі трикутника (через дві сторони та синус кута) для визначення площі дна склянки як основи для розрахунку витрат матеріалу;
- оцінює отримані результати на відповідність реальності (наприклад, чи не є кути занадто гострими для ергономіки) та робить обґрунтований висновок щодо класифікації форми виробу (рівносторонній чи різносторонній).

II. Ключові компетентності

1. Іноваційність:

- застосовує логічне мислення для аналізу нестандартної форми предмета; розуміє, як зміна геометричних параметрів (кутів та довжин сторін) впливає на функціональність та «анти-рол» властивості виробу в реальних умовах (транспорт, похилі поверхні).

2. Інформаційно-комунікаційна компетентність (ІКТ):

- використовує цифрові пристрої (калькулятор або онлайн-сервіси) для виконання тригонометричних обчислень; інтерпретує візуальну інформацію з ілюстрації, створеної ШІ, для побудови математичної моделі.

3. Навчання впродовж життя:

- виявляє здатність до самостійного пошуку зв'язків між шкільним курсом геометрії та сучасними галузями (промисловий дизайн, 3D-моделювання); аналізує власну діяльність під час перевірки ергономічних показників виробу.

4. Підприємливість та фінансова грамотність:

- прогнозує необхідну кількість витратних матеріалів (скляної маси) на основі розрахованої площі дна; усвідомлює важливість точних розрахунків для мінімізації виробничих втрат.

III. Наскрізнi вміння

- читання з розумінням: учень/учениця аналізує технічне завдання (ТЗ) дизайнерської студії; виокремлює ключові геометричні параметри з текстового опису та зіставляє їх із візуальною моделлю склянки;
- критичне мислення: оцінює функціональність виробу на основі отриманих цифр; робить висновок, чи забезпечують розраховані кути (α , β , γ) ергономічність склянки (чи не буде вона занадто "гострою" для руки);

- розв’язування проблем: розробляє послідовний алгоритм дій для перевірки технічної життєздатності ідеї — від розрахунку відсутньої сторони до фінального висновку про тип трикутника;
- здатність логічно обґрунтовувати позицію: аргументує, чому дана склянка не є рівносторонньою (правильною) чи рівнобедреною, спираючись на математичні розрахунки, а не лише на візуальне сприйняття;
- цифрова грамотність: демонструє вміння використовувати калькулятор або математичні застосунки для обчислення значень тригонометричних функцій ($\sin$, $\cos$) та ірраціональних чисел;
- конструктивне керування емоціями: виявляє наполегливість під час виконання багатоетапних обчислень та готовність до перевірки результатів у разі виникнення сумнівів у їхній реалістичності.

Повне розв’язання

Крок 1. Застосування теореми косинусів для знаходження невідомої сторони трикутника.

Нехай перша сторона трикутника $a = 7$ см, $b = 8$ см, $\gamma = 60^\circ$. Тоді, за загальним виглядом теореми косинусів, маємо:

$$\begin{aligned}c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma \\c^2 &= 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ \\c^2 &= 49 + 64 - 112 \cdot \frac{1}{2} \\c^2 &= 113 - 56 \\c^2 &= 57 \\c &= \sqrt{57} \approx 7,55\end{aligned}$$

Крок 2. Знаходження невідомих кутів трикутника α та β .

Застосуємо теорему синусів для знаходження кута α :

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \gamma}{c} \\ \sin \alpha &= \frac{7 \cdot \sin 60^\circ}{7,55} = \frac{7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{7,55} = \frac{6,06}{7,55} = \frac{606}{755} \approx 0,8\end{aligned}$$

Отже, $\alpha \approx 53^\circ$.

Знайдемо значення кута β через суму кутів трикутника:

$$\beta = 180 - (\alpha + \gamma) = 180 - (53 + 60) = 67^\circ$$

Крок 3. Обчислення площі основи.

Найзручніша формула для даного ТЗ — через дві сторони та кут між ними:

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma \\ S &= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = 28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3} \approx 24,2 \text{ см}^2\end{aligned}$$

Крок 4. Аналіз результатів.

Сторони трикутника 7 см, 8 см і 7,55 см, всі різної довжини, тому трикутник не є ні рівностороннім, ні рівнобедреним.

Кути трикутника 60° , 53° , 57° . Всі кути менші 90° , отже, трикутник гострокутний.

Ергономіка: оскільки різниця між кутами невелика (максимальна різниця близько 13°), форма склянки буде досить збалансованою для тримання рукою, не маючи надто гострих чи надто тупих граней.

Орієнтовні критерії оцінювання

<i>Рівень</i>	<i>Бали</i>	<i>[МАО 1] Дослідження та виокремлення проблем</i>	<i>[МАО 2] Моделювання та розроблення стратегій</i>	<i>[МАО 3] Критичне оцінювання результату</i>
Початковий	1 – 3	Розпізнає в умові геометричну фігуру (трикутник), але не може самостійно виписати дані.	Записує окремі формули (наприклад, суму кутів), але не знає, як їх застосувати.	Отримує окремі цифри без розуміння їхнього зв'язку з формою склянки.
Середній	4 – 6	Виписує дані (α , β , γ), будує частково правильне креслення, але плутає позначення елементів.	Обирає правильні теореми (косинусів/синусів) за підказкою, припускається значних помилок в обчисленнях.	Називає отримані результати, але не може зробити висновок щодо форми виробу.
Достатній	7 – 9	Самостійно будує схематичне креслення, ідентифікує сторони та кут. Розуміє суть "анти-рол" властивості.	Правильно застосовує теорему косинусів та формулу площі. Проводить обчислення з незначними похибками в округленні.	Порівнює отримані значення сторін і робить правильний висновок, що трикутник рівносторонній.
Високий	10 – 12	Аналізує технічне завдання, встановлює всі зв'язки між дизайном та геометрією. Прогнозує ергономіку.	Обирає найраціональніший шлях розв'язання. Точно обчислює сторону, кути та площу. Коректно використовує одиниці вимірювання.	Здійснює рефлексію: обґрунтовує, чому знайдені параметри є прийнятними для дизайну. Пропонує зміни для "ідеальної" моделі.

Можливі варіанти диференціації

Для учнів, які потребують підтримки:

- замість кута 60° можна дати кут 90° (прямокутна основа), щоб учні могли використати теорему Піфагора замість теореми косинусів на першому етапі;
- надати учням готовий шаблон трикутника, де вже підписані сторони трикутника;

- додати до картки «дорожню карту»: 1) запиши формулу теореми косинусів, 2) підстав числа 8 та 7, 3) знайди значення $\cos 60^\circ$ у таблиці і так далі.

Базовий рівень: виконується в тому вигляді, як описано вище (знаходження сторони, кутів, площі та висновок про тип трикутника).

Для сильних учнів:

- завдання «Оптимізація дизайну»: запропонувати учням змінити кут γ або співвідношення сторін так, щоб трикутник став рівнобедреним (для симетрії виробу). Яким тоді має бути кут, щоб площа дна залишилася такою самою?

- креативне моделювання: розрахувати радіус кола, яке можна вписати в цей трикутник (радіус «внутрішнього об'єму» склянки), щоб зрозуміти, наскільки товстими будуть стінки виробу;

- запропонувати виконати побудову моделі основи в GeoGebra, щоб автоматично підтвердити правильність розрахунків сторони c .

2.4. Фігури без меж: многокутники і коло

2.4.1. Таємниця циркової арени

Авторка: *Кузьменко Лариса Олександрівна, вчитель математики Черкаського гуманітарно-правового ліцею Черкаської міської ради Черкаської області*

Чи замислювалися ви, чому а усьому світі – від Парижа до Києва – арени цирку мають однакову форму кола і майже однаковий діаметр? Це не



просто архітектурна традиція, а точний математичний та фізичний розрахунок.

Історія сучасної арени розпочалася у 1768 році, коли відставний британський кавалерійський офіцер Філіп Естлі відкрив першу школу верхової їзди. Він помітив: якщо кінь біжить по колу певного радіуса, відцентрова

сила допомагає вершнику легше утримувати рівновагу, стоячи на спині тварини. Естлі експериментував із різними розмірами, поки не знайшов ідеальну довжину кола, яка дозволяла коням бігти з потрібною швидкістю, а глядачам – бачити кожен трюк з будь-якого куточка зали. Стандартний діаметр арени становить 13 метрів.

Сьогодні проектування цирку – це складна інженерна задача, де потрібно гармонійно поєднати площу арени для артистів, безпечну відстань до першого ряду глядачів та розміщення декорацій у формі правильних многокутників.

Завдання

1. Обчисліть довжину кола стандартної циркової арени. Використовуйте значення $\pi=3,14$.

2. Для виступу ілюзіоніста в центр арени вписали декорацію у формі правильного шестикутника. Обчисліть сторону шестикутника та його площу. Використайте значення $\sqrt{3} = 1,73$. Результат площі округліть до цілих.

3. Навколо арени (зовні) планується встановити бордюр висотою 50 см та викласти м'яку доріжку шириною 1 метр. Обчисліть площу цієї доріжки (площу кільця), щоб закупити необхідну кількість каучукового покриття. Результат площі округлити до цілих.

4. Адміністрація цирку вирішила змінити центральну декорацію на правильний восьмикутник, вписаний у те саме коло. Визначте сторону цього восьмикутника. (Допоміжна інформація: $\sin 22,5^\circ=0,3827$). Чи

вистачить 40 метрів світлодіодної стрічки, щоб підсвітити його по периметру? Відповідь пояснити.

Очікувані результати навчання

I. Предметна компетентність (математична)

Учень/учениця пояснює зміст понять коло та круг та застосовує відповідні формули для розв'язування задач.

- Знає означення кола та круга, властивості правильних многокутників, формули довжини кола, площі круга, формули зв'язку між радіусами вписаного і описаного кола та стороною правильного многокутника.
- Знаходить площу круга та площу кільця як різницю площ двох кругів.
- Моделює реальні ситуації (створення декорацій для виступу) за допомогою правильних многокутників та їх взаємодії з колом.
- Виконує обчислення, пов'язані з тригонометричними функціями та виконує округлення результатів згідно з завданням.

II. Ключові компетентності

1. Критичне мислення: учень аналізує, чи достатньо ресурсів для розв'язання технічного завдання, роблячи логічний висновок («вистачить» чи «ні»).

2. Уміння вчитися впродовж життя: здатність використовувати допоміжну інформацію (наприклад, $\sin 22,5^\circ$), яку він не обов'язково пам'ятає напам'ять.

3. Інформаційно-комунікаційна компетентність (ІКТ): учень працює з різними джерелами та формами інформації.

- Використовує допоміжні дані.
- Перетворює текстову умову задачі у візуальну схему або математичний алгоритм.

4. Підприємливість та фінансова грамотність

- Імітація складання кошторису на закупівлю матеріалів (розрахунок площі каучукового покриття).
- Вчиться уникати зайвих витрат або дефіциту матеріалу (ситуація зі стрічкою 40 м), що є основою господарської діяльності.

5. Уміння навчатися впродовж життя

- Демонструє здатність застосовувати набуті знання з геометрії для розв'язування прикладних проблем.
- Вміє самостійно шукати шлях розв'язання, коли змінюються вхідні умови (перехід від 6-кутника до 8-кутника).

III. Наскрізні вміння

- Читання з розумінням: здатність точно інтерпретувати текст задачі, визначаючи ключові числові дані та їхню роль для розв'язання задачі.
- Логічне обґрунтування: здатність чітко формулювати послідовність кроків для розв'язання.

- Розв'язування проблем: здатність перетворити текстову проблему на математичну модель, що вимагає виходу за межі стандартних формул, що вивчалися.

Розв'язання

1. Для знаходження довжини арени використовуємо формулу $C=\pi d$. $C=13 \cdot 3,14=40,82(\text{м})$.

2. Для шестикутника, вписаного в коло, сторона дорівнює радіусу описаного кола: $a_6=R_6=d/2=6,5(\text{м})$

Площа правильного шестикутника дорівнює шести площам рівносторонніх трикутників, з яких він складається: $S_6 = 6 \cdot \frac{a_6^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot (6,5)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 63,375 \cdot \sqrt{3} \approx 110 (\text{м}^2)$

3. Площа кільця знаходиться як різниця площі великого круга і площі арени. $R_{\text{в}}$ (радіус великого круга)= $R_{\text{ар}}$ (радіус арени) + 1метр=6,5+1=7,5(м).

$S_{\text{к}} = \pi \cdot R_{\text{в}}^2 - \pi \cdot R_{\text{ар}}^2 = \pi \cdot 7,5^2 - \pi \cdot 6,5^2 = 56,25\pi - 42,25\pi = 14\pi = 43,96 \approx 44 (\text{м}^2)$

4. Сторону правильного восьмикутника обчислюємо за формулою: $a_8 = R_8 \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{8}\right) = 6,5 \cdot 2 \cdot \sin 22,5^\circ = 4,9751 (\text{м})$. Щоб підсвітити периметр восьмикутника необхідно $4,9751 \cdot 8=39,8008 (\text{м})$. Отже, 40 м світлодіодної стрічки вистачить.

Орієнтовні критерії оцінювання

Рівень	Бали	[МАО 1] Дослідження ситуації	[МАО 2] Моделювання та стратегія	[МАО 3] Критичне оцінювання
Початковий	1–3	Розпізнає об'єкти (коло, шестикутник), але плутає діаметр (13 м) із радіусом. Випишує зайві дані (висота бордюру 50 см).	Записує формули довжини кола чи площі з помилками. Намагається обчислити периметр через додавання сторін "на око".	Не розуміє змісту отриманих чисел. Не може відповісти на запитання про те, чи вистачить стрічки(завдання 4).
Середній	4–6	Правильно визначає радіус ($R=6,5$ м). Розуміє різницю між вписаним шестикутником та кільцем (доріжкою).	Обчислює довжину кола (C) та сторону шестикутника ($a_6=R$). Припускається помилок у формулі площі кільця або шестикутника.	Робить висновок про стрічку на основі розрахунків, але не може пояснити логіку порівняння. Округлення виконує неправильно.
Достатній	7–9	Самостійно виокремлює всі геометричні	Правильно застосовує формули площі круга, кільця	Обґрунтовує вибір формул. Правильно

		параметри. Розуміє, що для доріжки зовнішній радіус збільшується на 1 м	та вписаного шестикутника	округлює результати до цілих. Дає чітку відповідь щодо світлодіодної стрічки з поясненням.
Високий	10–12	Аналізує модель цілісно: як зміна форми декорації (з $n=6$ на $n=8$) впливає на її периметр та площу. Бачить зв'язок між радіусом та тригонометрією.	Безпомилково розв'язує всі етапи. Демонструє раціональні обчислення. Точно знаходить периметр восьмикутника.	Критично оцінює результат: аналізує доцільність використання різних декорацій. Пропонує, як змінити кількість стрічки, якщо декорацію змінити знову.

Можливі варіанти диференціації

Охоплюють зміст, процес і результат, дозволяючи адаптувати її для учнів з різним рівнем підготовки та стилем навчання.

Диференціація за змістом (Що вивчаємо?)

Цей варіант адаптує самі дані або складність математичних об'єктів.

1. Спрощення числових даних:

- Для учнів з базовим рівнем: Замість стандартного радіусу арени використовувати ціле число (наприклад, 5 м або 10 м), щоб полегшити обчислення площі та довжини арени без втрати розуміння формул.

- Для учнів з високим рівнем: Використовувати точне значення числа π у проміжних розрахунках, округлюючи лише фінальний результат, або додати умову врахування товщини бордюру при розрахунку площі кільця.

2. Варіювання геометричних фігур:

- Для учнів з базовим рівнем: У завданні 2 обмежитися лише знаходженням сторони шестикутника (яка дорівнює радіусу), не переходячи до складних формул площі.

- Для учнів з високим рівнем: У завданні 4 запропонувати порівняти периметри вписаного та описаного восьмикутника, щоб зрозуміти межі похибки при закупівлі світлодіодної стрічки.

Диференціація за процесом (Як працюємо?)

Цей варіант адаптує спосіб виконання завдань, забезпечуючи різну підтримку.

4. Різна ступінь підтримки (сходінки допомоги):

- Для учнів з базовим рівнем: надати картку з формульним меню.

- Для учнів з високим рівнем: запропонувати вивести формулу сторони восьмикутника через теорему косинусів або через тригонометричні співвідношення в прямокутному трикутнику самостійно.

5. Групова робота:

- Гетерогенні групи: сформувати групи, де учні з різними рівнями підготовки допомагають одне одному. Сильний учень може пояснити, як знайти сторону восьмикутника, а учень із середнім рівнем — виконати розрахунок.

6. Використання інструментів:

- Для кінестетиків/візуалів: використати циркуль та лінійку для побудови моделі арени в масштабі 1:100 перед початком розрахунків.

- Для учнів з базовим рівнем: дозволити використовувати онлайн-калькулятор або GeoGebra для перевірки правильності обчислення площі восьмикутника.

Диференціація за результатом (Що отримуємо?)

Цей варіант адаптує форму подання кінцевого продукту.

1. Обов'язковий та додатковий результати:

- Обов'язковий результат: усі учні мають обчислити довжину кола та сторону шестикутника (завдання 1 та частину завдання 2).

- Додатковий результат: скласти «кошторис» для адміністрації цирку: скільки рулонів каучукового покриття потрібно купити, якщо один рулон має площу 5 м^2 , та скільки це коштуватиме за заданою ціною.

2. Формат подання:

- Один учень може подати розв'язки у формі традиційного письмового звіту.

- Інший може представити розв'язок на інтерактивній дошці або у вигляді презентації, пояснюючи кроки обчислень.

2.4.2. Проєкт «Оновлення міського парку»

Авторка: *Кузьменко Лариса Олександрівна, вчитель математики Черкаського гуманітарно-правового ліцею Черкаської міської ради Черкаської області*

Міська рада міста вирішила реконструювати центральну площу парку, додавши зону відпочинку з фонтаном та декоративною плиткою. Відділ



архітектури запропонував два варіанти облаштування центральних елементів.

Об'єкт 1 (Центральна клумба): Клумба має форму правильного шестикутника. Відомо, що радіус кола, описаного навколо цієї клумби, дорівнює 4 метри. Навколо клумби планують встановити декоративну огорожу. Вартість 1 метра огорожі становить 450 грн.

Об'єкт 2 (Світловий фонтан): Фонтан має форму круга. Дизайнери розрахували, що

довжина зовнішнього бортика фонтану (довжина кола) становить 31,4 метри. В середині фонтану встановлено чашу у формі правильного трикутника, вписаного у коло фонтану. Також відомо, що для технічного обслуговування використовують насос потужністю 1,5кВт.

Завдання

1. Обчисліть сторону клумби (Об'єкт 1) та її периметр. Визначте вартість декоративної огорожі для всієї клумби.
2. Знайдіть площу клумби (Об'єкт 1), щоб флористи мали змогу потім розрахувати кількість чорнозему для висадки квітів. Використайте значення $\sqrt{3} = 1,73$. Результат округліть до цілих.
3. Визначте радіус фонтану (Об'єкт 2), використовуючи значення $\pi=3,14$. Обчисліть площу дна фонтану.
4. Знайдіть довжину сторони трикутної чаші, що вписана у фонтан (Об'єкт 2). Яку частину площі фонтану (у відсотках) займає вільна від чаші вода, якщо площа трикутної чаші становить $32,5 \text{ м}^2$? Результат округліть до цілих.

Очікувані результати навчання

I. Предметна компетентність (математична)

• Учень/учениця пояснює зміст понять кола, круга, властивості правильних многокутників, формули довжини кола, площі круга та зв'язок між стороною вписаного многокутника й радіусом кола.

• Обчислює периметри та площі правильних многокутників, площу круга та його частин.

• Застосовує тригонометричні співвідношення та сталі значення для прикладних розрахунків.

• Моделює: перетворює опис архітектурних об'єктів (клумба, фонтан) у геометричні моделі.

II. Ключові компетентності

1. Критичне мислення: учень аналізує, чи достатньо бюджету/матеріалів на основі отриманих обчислень для виконання робіт.

• Уміння вчитися впродовж життя: здатність використовувати допоміжну інформацію (наприклад, $\sin 22,5^\circ$), яку він не обов'язково пам'ятає напам'ять.

• Інформаційно-комунікаційна компетентність (ІКТ): учень перетворює текстові умови архітектурного проєкту у візуальну схему.

• Підприємливість та фінансова грамотність: розрахунок вартості матеріалів (огорожі) та планування ресурсів (чорнозем, площа покриття).

• Уміння навчатися впродовж життя

• Демонструє здатність застосовувати набуті знання з геометрії для розв'язування реальних проблем міського благоустрою.

• Вміє самостійно шукати шлях розв'язання, коли змінюються вхідні умови (вибір вигляду многокутника як форми об'єкта).

III. Наскрізні вміння

• Читання з розумінням: Здатність точно інтерпретувати текст задачі, визначаючи ключові числові дані та їхню роль для розв'язання задачі.

• Логічне обґрунтування: Здатність чітко формулювати послідовність кроків для розв'язання.

• Розв'язування проблем: Здатність перетворити текстову проблему на математичну модель, що вимагає виходу за межі стандартних формул, що вивчалися.

Розв'язання

1. Для правильного шестикутника сторона a_6 є радіусом описаного кола навколо шестикутника (R). $a_6=4$ м. $P=6 \cdot a_6=24$ (м)

Вартість огорожі: $24 \cdot 450=10800$ (грн)

2. Площа клумби – площа правильного шестикутника. $S_6 = 6 \cdot \frac{a_6^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot 16 \cdot \sqrt{3}}{2} = 24 \cdot \sqrt{3} = 41,52 \approx 42$ (м²)

3. Радіус фонтану визначається з формули $C=2\pi R$. $R = \frac{C}{2\pi} = \frac{31,4}{3,14 \cdot 2} = 5$ (м). Для обчислення площі дна фонтану використовується формула $S=\pi R^2=3,14 \cdot 25=78,5$ (м²)

4. Сторона правильного трикутника вписаного в коло: $a_3 = R \cdot \sqrt{3} = 1,73 \cdot 5 = 8,65$ (м). Площа вільної води S знаходиться як різниця площі круга і площі трикутника. $S = 78,5 - 32,5 = 46$ (м²). Для обчислення частини вільної води від всього фонтану, використовується формула відсоткового відношення: $\frac{46}{78,5} \cdot 100\% \approx 59\%$.

Орієнтовні критерії оцінювання

<i>Рівень</i>	<i>Бали</i>	<i>[МАО 1] Дослідження ситуації</i>	<i>[МАО 2] Моделювання та стратегія</i>	<i>[МАО 3] Критичне оцінювання</i>
Початковий	1–3	Ідентифікує фігури (шестикутник, коло, трикутник). Випишує числові дані, але не розрізняє радіус (R) та сторону (a).	Записує формули з помилками. Намагається обчислити вартість огорожі, не знайшовши периметр. Використовує зайві дані (1,5 кВт).	Не може співвіднести отриманий результат із запитанням. Відсутні висновки щодо відсоткового співвідношення площ.
Середній	4–6	Розуміє, що для Об'єкта 1 $a_6 = R$. Визначає радіус фонтану через довжину кола, але припускається помилок у розрахунках.	Знаходить периметр клумби та вартість огорожі. Обчислює площі, але має труднощі з коректним використанням формул.	Дає відповідь на запитання, але не пояснює логіку округлення. Не може самостійно скласти модель для пошуку відсотка вільної води.
Достатній	7–9	Самостійно виокремлює всі геометричні параметри обох об'єктів. Правильно трактує поняття "вписаний трикутник" та "описане коло".	Коректно застосовує формули для знаходження сторони трикутника та площі. Правильно виконує обчислення вартості та площ.	Обґрунтовує вибір формул. Правильно виконує округлення до цілих. Знаходить відсоток вільної площі води з незначними неточностями.
Високий	10–12	Аналізує модель комплексно. Встановлює зв'язок між лінійними розмірами та площею. Розуміє практичну значущість отриманих цифр для бюджету.	Безпомилково розв'язує всі завдання. Демонструє раціональні методи обчислень. Точно знаходить відсоток вільної площі води.	Критично оцінює результат. Пояснює, чому потужність насоса не впливає на геометричні розрахунки. Робить узагальнюючий висновок щодо доцільності проєктів.

Можливі варіанти диференціації

Охоплюють зміст, процес і результат, дозволяючи адаптувати її для учнів з різним рівнем підготовки та стилем навчання.

Диференціація за змістом (Що вивчаємо?)

Цей варіант адаптує самі дані або складність математичних об'єктів.

1. Спрощення числових даних:

- Для учнів з базовим рівнем: Замість радіусу клумби використовувати ціле число (наприклад, 5м або 10м), щоб полегшити обчислення без втрати розуміння формул. Знайти лише периметр клумби.

- Для учнів з високим рівнем: Розрахувати, скільки плиток розміром 20х20 см потрібно для покриття вільної площі фонтану з урахуванням 5% на підрізку.

2. Варіювання геометричних фігур:

- Для учнів з базовим рівнем: Змінити форму на традиційний трикутник, не переходячи до складних формул площі.

- Для учнів з високим рівнем: Ускладнити правильний многокутник, що використовується, наприклад, на восьмикутник.

Диференціація за процесом (Як працюємо?)

Цей варіант адаптує спосіб виконання завдань, забезпечуючи різну підтримку.

1. Різна ступінь підтримки (сходінки допомоги):

- Для учнів з базовим рівнем: надати картку-підказку з повним описом кроків, що треба виконати.

- Для учнів з високим рівнем: замість готових формул запропонувати самостійно обґрунтувати розрахунки. Наприклад: Доведіть, чому сторона шестикутної клумби дорівнює 4 м, використовуючи властивості центральних кутів.

2. Групова робота:

- Гетерогенні групи: створення груп, де поєднуються учні з різними сильними сторонами, дозволяє реалізувати формат «рівний-рівному». Розподіл ролей: аналітик – пояснює логічні зв'язки; обчислювач – проводить основні математичні операції; конструктор/оформлювач – відповідає за візуалізацію та фінальний запис.

3. Використання інструментів:

- Для кінестетиків/візуалів: побудувати модель клумби у масштабі 1:100 за допомогою циркуля та лінійки. Це допоможе наочно побачити, що радіус кола справді формує шість рівних трикутників всередині.

- Для учнів з базовим рівнем: учні можуть побудувати в GeoGebra коло з довжиною 3,14 та вписати в нього трикутник. Програма автоматично покаже площу, що дозволить учневі перевірити свої ручні розрахунки та відчути впевненість. Використання для розрахунку відсотків онлайн-калькулятора, щоб уникнути помилок у діленні багатоцифрових чисел.

Диференціація за результатом (Що отримуємо?)

Цей варіант адаптує форму подання кінцевого продукту.

4. Обов'язковий та додатковий результати:

- Обов'язковий результат: усі учні мають обчислити сторону клумби та радіус фонтану, розрахувати вартість огорожі, обчислити площі для подальшого виконання робіт.

- Додатковий результат: розрахувати кількість рулонів покриття для вільної зони фонтану, визначити фінальну суму витрат на покриття за ринковою ціною (наприклад, 800 грн. за рулон).

5. Формат подання:

Учні обирають формат звіту, який найкраще підходить їхньому стилю комунікації.

- Один учень може подати розв'язки у формі традиційного письмового звіту (робота в зошиті або на бланку «Технічного звіту»).

- Інший може представити розв'язок на інтерактивній дошці або у вигляді презентації, пояснюючи кроки обчислень.

- Презентація у вигляді представлення проєкту.

2.4.3. Зрошувальна система

Авторка: *Кузьменко Лариса Олександрівна, вчитель математики Черкаського гуманітарно-правового ліцею Черкаської міської ради Черкаської області*

Якщо ви колись летіли літаком над посушливими регіонами або розглядали супутникові знімки Google Maps, то напевно помічали ідеально рівні зелені кола, що вкривають земну поверхню, наче гігантське конфеті. Це не робота інопланетян, а результат роботи центрально-півотних зрошувальних систем (Center Pivot Irrigation).



Ця технологія, винайдена у 1940-х роках у США, здійснила революцію в сільському господарстві. Замість того, щоб чекати дощу або затоплювати поля водою, фермери використовують гігантські металеві ферми на колесах, які обертаються навколо центральної точки — артезіанської свердловини. Довжина такої «стріли» може сягати 400 - 800 метрів.

З погляду геометрії, така система є ідеальним прикладом використання властивостей кола. Вона мінімізує витрати води та енергії, проте ставить перед інженерами складне завдання: як ефективно засіяти квадратну земельну ділянку, якщо машина залишає «сухими» її кути?

Завдання

1. Фермерське господарство має квадратну ділянку землі зі стороною 800 метрів. У центрі ділянки встановлено кругову поливальну систему, довжина стріли якої дорівнює відстані від центру до межі поля. Обчисліть площу ділянки, яку охоплює поливальна машина.

2. Знайдіть відсоток площі поля, який залишається без поливу за умов задачі 1.

3. На краю стріли встановлена крайня форсунка. Яку відстань вона долає за один повний оберт системи?

4. Якщо швидкість руху краю стріли становить приблизно 2 метра за хвилину, скільки часу знадобиться системі для повного зрошення поля (повного оберт)?

Очікувані результати навчання

I. Предметна компетентність (математична)

- Учень/учениця пояснює зміст понять кола, круга, взаємозв'язок між стороною квадрата (як описаного многокутника) та радіусом вписаного кола.

- Обчислює площу круга та довжину кола, використовуючи число π , а також знаходить площу квадрата та різницю площ геометричних фігур.
- Застосовує формули рівномірного руху для розрахунку часу виконання технологічних процесів у сільському господарстві.
- Моделює: перетворює опис реального об'єкта у геометричну модель.

II. Ключові компетентності

- Уміння вчитися впродовж життя: здатність самостійно визначати необхідні формули для розв'язування прикладних задач (співвідношення радіусу до сторони поля).
- Екологічна грамотність: аналізує раціональність використання земельних ресурсів та ефективність зрошення території.
- Підприємливість та фінансова грамотність: планування робочого часу техніки та оцінки ефективності використання площі земельної ділянки.

III. Наскрізні вміння

- Читання з розумінням: здатність інтерпретувати технічний опис як радіус кола (довжина стріли дорівнює відстані від центру до межі поля).
- Логічне обґрунтування: вміння послідовно пояснити перехід від геометричних параметрів (радіус, довжина кола) до практичних показників (час роботи системи).
- Розв'язування проблем: здатність трансформувати текстову умову аграрного завдання в математичний алгоритм дій для оптимізації господарських процесів.

Розв'язання

1. Оскільки стріла йде від центру до межі квадрата, то радіус кола $800:2=400$ метрів. Площа поливу дорівнює площі круга $S=\pi R^2=3,14 \cdot 160000=502400$ (кв.м.)
2. Щоб знайти відсоток поля, який залишається без поливу, треба: взяти знайдену площу круга; знайти площу всього поля: $S=640000$ (кв.м.); знайти різницю площі квадрата і круга $640000-502400=137600$ (кв.м.), а потім знайти відсоток площі поля, що залишається без поливу $137600 \cdot 100:640000=21,5\%$
3. Шуканою відстанню буде довжина кола радіуса 400 м: $C=2\pi R=2 \cdot 3,14 \cdot 400=2512$ (м).
4. Щоб знайти необхідний час, потрібно довжину кола поділити на швидкість: $2512:2=1256$ (хв). Приблизно 21 година.

Орієнтовні критерії оцінювання

Рівень	Бали	[МАО 1] Дослідження ситуації	[МАО 2] Моделювання та стратегія	[МАО 3] Критичне оцінювання
Початковий	1–3	Розуміє, що стріла — це радіус, але плутає його з діаметром.	Записує формули площі квадрата або круга з помилками.	Не може пояснити, чому кути поля залишаються сухими. Не

		Випишує цифри 800 та 1940 без системного зв'язку.	Обчислення часу оберту відсутні або хаотичні.	розуміє поняття "відсоток площі".
Середній	4–6	Визначає радіус системи ($R=400$ м) та сторону квадрата ($a=800$ м). Розуміє, що за один оберт форсунка проходить довжину кола.	Обчислює площу круга та довжину кола з механічними помилками. Знаходить час через формулу $t = S/v$.	Робить висновок про те, що частина поля не поливається. Проте не може точно розрахувати відсоток втраченої площі.
Достатній	7–9	Правильно виокремлює параметри моделі. Розуміє, що "відстань від центру до межі" — це половина сторони квадрата.	Коректно обчислює площу квадрата та круга. Знаходить відсоток "сухої" площі через різницю площ. Правильно розраховує час оберту в хвилинах.	Обґрунтовує результати. Пояснює фізичний зміст довжини кола як шляху форсунки. Коректно переводить хвилини у години.
Високий	10–12	Аналізує модель критично. Розуміє, що швидкість краю стріли впливає на рівномірність поливу. Встановлює зв'язок між лінійними та кутовими величинами.	Безпомилково розв'язує всі етапи задачі. Демонструє раціональні обчислення. Точно знаходить час повного оберту.	Критично оцінює ефективність системи. Робить узагальнюючий висновок про те, як інженерні рішення впливають на сільське господарство та екологію.

Можливі варіанти диференціації

Охоплюють зміст, процес і результат, дозволяючи адаптувати її для учнів з різним рівнем підготовки та стилем навчання.

Диференціація за змістом (Що вивчаємо?)

Цей варіант адаптує самі дані або складність математичних об'єктів.

1. Спрощення числових даних:

- Для учнів з базовим рівнем: Замість сторони 800 м використовувати 100 м або 10 м. Число π прийняти приблизно рівне 3 для обчислення площі круга та довжини кола.

- Для учнів з високим рівнем: Додати умови втрати води на випаровування (наприклад, 12%) або розрахувати потужність насоса, якщо відома норма поливу на 1 кв.м.

2. Ускладнення геометричної моделі:

- Для учнів з базовим рівнем: Виконати завдання лише на знаходження радіуса (який дорівнює половині сторони квадрата) та площі круга.

- Для учнів з високим рівнем: Розрахувати параметри системи, якщо вона встановлена не в центрі, а в куті ділянки (сектор кола), або якщо на полі встановлено 4 малі системи замість однієї великої.

Диференціація за процесом (Як працюємо?)

Цей варіант адаптує спосіб виконання завдань, забезпечуючи різну підтримку.

1.Різна ступінь підтримки (сходинки допомоги):

- Для учнів з базовим рівнем: надати алгоритм-підказку.
- Для учнів з високим рівнем: запропонувати вивести загальну формулу відсотка площі, що не поливається, яка не залежить від довжини сторони квадрата (доведення того, що цей відсоток завжди сталий для вписаного кола).

2.Групова робота:

- Розподілення ролей: Головний інженер - відповідає за правильний підбір формул, які будуть використовуватися в обчисленнях; Економіст – проводить всі обчислення, необхідні для розв'язання задачі; Технік - аналізує знаходження та обчислює час оберту поливної системи.

3.Використання інструментів:

- Для кінестетиків/візуалів: побудувати модель поля в масштабі 1:10000 (в 1 см – 100 м) за допомогою циркуля та лінійки. Це допоможе наочно побачити «мертві зони» у кутах квадрата.
- Для учнів з базовим рівнем: учні можуть побудувати в GeoGebra модель руху форсунки; можуть анімувати точку на колі, щоб візуально зрозуміти зв'язок між швидкістю, часом та довжиною кола.

Диференціація за результатом (Що отримуємо?)

Цей варіант адаптує форму подання кінцевого продукту.

1. Обов'язковий та додатковий результати:

- Обов'язковий результат: усі учні мають визначити радіус системи (400 м), площу зрошення та час повного оберту.
- Додатковий результат: запропонувати варіант раціонального використання кутів поля, які не потрапляють під круговий полив (наприклад, розрахувати площу для встановлення сонячних панелей або допоміжних споруд у цих чотирьох зонах).

2. Формат подання:

Учні обирають формат звіту, який найкраще підходить їхньому стилю комунікації.

- Письмове розв'язання задач може бути подано традиційно в зошиті.
- Прикладний варіант подання: створення «Технічного паспорту поливальної установки», де вказані всі характеристики.

- Відеопрезентація із поясненням того, як зміна швидкості руху стріли вплине на час поливу.

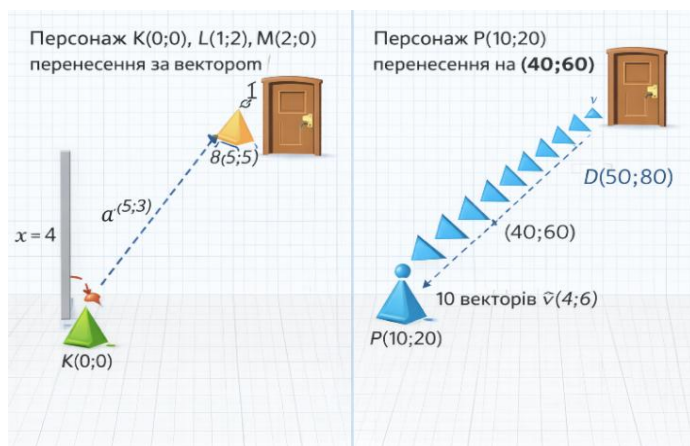
2.5. Магія перетворень: рухи фігур на площині

2.5.1. Розробка простої 2D-гри

Авторка: *Волкова Катерина Михайлівна, вчитель математики Черкаської гімназії №9 ім. О. М. Луценка Черкаської міської ради Черкаської області*

Ви – розробник простої 2D-гри. Персонажі рухаються на координатній площині за допомогою векторів паралельного перенесення

Персонаж 1 має форму трикутника з вершинами $K(0;0)$, $L(1;2)$, $M(2;0)$. Двері сховища розташовані за вектором паралельного перенесення



$\vec{a}(5;3)$, на шляху є перешкода – стіна, що проходить по прямій: $x=4$

Завдання:

- обчисліть нові координати вершин після переміщення,
- визначте, чи перетне персонаж стіну під час руху

Персонаж 2

знаходиться у точці $P(10;20)$,

двері знаходяться у точці $D(50;80)$. Персонаж 2 рухається кліками миші. За один клік він зміщується на вектор $\vec{v}(4;6)$

Завдання :

- запишіть формулу паралельного перенесення, яке виконує рух,
- визначте кількість кліків (кроків), необхідних для досягнення дверей

Надлишкові дані (для розвитку критичного мислення):

- форма персонажа (трикутник) не впливає на рух центру;
- координати всіх вершин потрібні лише для аналізу перешкоди;
- напрям руху можна знайти без побудови графіка;
- довжини сторін трикутника не потрібні.

Методичні рекомендації для вчителя

Задача сприяє розвитку просторового мислення, формує математичне моделювання, міжпредметні зв'язки (математика + інформатика + геймдизайн). Під час дослідження учні працюють в парах, одна група досліджує координати; інша – аналізує перешкоди. При обговоренні результатів порівнюють математичний і програмний підхід, проводячи рефлексію, встановлюють де ще використовують вектори.

Очікувані результати навчання (відповідно до НУШ)

Учень/учениця

- аналізує життєву ситуацію та виокремлює математичну проблему;
- будує математичну модель реальної ситуації;

- інтерпретує результати обчислень у реальному контексті;
- критично оцінює отримані висновки;
- аргументує власну позицію

I. Предметна компетентність (математична):

Пояснює, який рух називають паралельним перенесенням, **застосовує** паралельне перенесення та його властивості для розв'язування задач; **зображує** та знаходить на рисунках образи і прообрази фігур при паралельному перенесенні; **використовує** формули паралельного перенесення в дослідженні розв'язання задачі

II. Ключові компетентності:

Інформаційно – цифрова компетентність

Моделює рух в грі, складає алгоритм та діє за ним, **оптимізує** свою діяльність шляхом використання сучасних засобів комп'ютерної техніки

Навчання впродовж життя

Визначає мету діяльності, **аналізує**, **перевіряє** і **оцінює** результати навчальної діяльності; **організовує** та **планує** навчальну діяльність

Ініціативність та підприємливість

Проектує ігрову ситуацію, **генерує** нові ідеї, **аналізує** та **ухвалює** оптимальні рішення

Спілкування державною мовою

Грамотно **висловлюється** державною мовою, **обґрунтовує** розв'язання, веде конструктивний діалог

Наскрізні лінії

Під час дослідження завдання, крім формування ключових компетентностей, реалізуються такі наскрізні лінії, як «Підприємливість та фінансова грамотність», «Екологічна безпека» - через цифрове середовище, «Громадянська відповідальність» - через роботу в команді, «Інформаційна безпека».

Розв'язання:

Завдання 1. Нові координати трикутника

Формула паралельного перенесення:

$(x; y) \rightarrow (x+a; y+b)$, де $\vec{a}(5; 3)$

Вершина К:

$K'(0+5; 0+3) = K'(5; 3)$

Вершина L:

$L'(1+5; 2+3) = L'(6; 5)$

Вершина М:

$M'(2+5; 0+3) = M'(7; 3)$

Нові координати:

$K'(5; 3)$, $L'(6; 5)$, $M'(7; 3)$

Завдання 2. Чи перетне персонаж стіну $x=4$?

Порівнюємо x – координати до і після руху

<i>вершина</i>	<i>x - було</i>	<i>x - стало</i>
K	0	5
L	1	6
M	2	7

Стіна : $x = 4$.

Оскільки для всіх вершин початкова x – координата менше 4, а кінцева x – координата більше 4, тому персонаж обов’язково перетне стіну під час руху

Відповідь: так, перетне

Завдання 3. Формула перенесення персонажа 2

Знайдемо вектор перенесення

$$\overrightarrow{PD}(50 - 10; 80 - 20) = \overrightarrow{PD}(40; 60)$$

Формула паралельного перенесення:

$$(x; y) \rightarrow (x+40; y+60)$$

Завдання 4. Кількість кліків

Один клік $\vec{v}(4; 6)$

Потрібний вектор:

$$(40; 60)$$

Знаходимо число кроків n :

$$(4n; 6n) = (40; 60)$$

$$4n = 40 \Rightarrow n = 10$$

$$6n = 60 \Rightarrow n = 10$$

Персонаж зробить **10 кліків**

Орієнтовні критерії оцінювання

<i>Рівень</i>	<i>МАО 1 аналіз ситуації</i>	<i>МАО 2 модельовання</i>	<i>МАО 3 критичне мислення</i>	<i>Бали</i>
початковий	не аналізує дані	знає означення	відповідає коротко	1-3
середній	знаходить частину розв’язку	виконує обчислення з допомогою	пояснює кроки	4-6
достатній	аналізує перешкоду	правильно застосовує формули	аргументує рішення	7-9
високий	будує математичну модель руху	пояснює зміст перенесення	використовує математичну мову та ІТ - контент	10-12

У задачі можна використати **чотири типи диференціації**:

- **за процесом** — різні способи виконання завдання;
- **за результатом** — різний рівень очікуваних відповідей;
- **за змістом** — різна складність математичної моделі;
- **за дослідницькою діяльністю** — створення власних моделей.

Диференціація за змістом задачі

Базовий рівень (спрощений зміст)

Учням пропонується працювати з однією точкою замість фігури.

Завдання:

Точка $A(2;3)$ переміщується на вектор $\vec{a}(5;3)$

1. Знайдіть нові координати точки.
2. Побудуйте початкову і кінцеву точку на координатній площині.

Мета: засвоїти правило додавання вектора до координат точки.

Середній рівень (стандартний зміст)

Учні розв'язують основну задачу.

Завдання:

Персонаж має форму трикутника $K(0;0), L(1;2), M(2;0)$

Виконується перенесення на вектор $\vec{a}(5;3)$

Потрібно:

1. Знайти нові координати вершин.
2. Побудувати фігуру до і після перенесення.
3. Визначити, чи перетне персонаж стіну $x=4$

Мета: застосувати **векторне перенесення для фігури**.

Достатній рівень (ускладнений зміст)

До задачі додається аналіз руху персонажа.

Додаткові питання:

1. Знайти вектор переміщення між точками $P(10;20)$ і $D(50;80)$
2. Записати формулу паралельного перенесення:
 $(x';y')=(x+40;y+60)$
3. Визначити кількість кроків, якщо один крок — це вектор $\vec{v}(4;6)$

Високий рівень (дослідницький зміст)

Учням пропонується моделювання та дослідження ситуації.

Можливі завдання:

1. Змінити координати вектора перенесення і дослідити:
 - коли персонаж не перетне стіну;
 - коли доторкнеться до неї.
2. Знайти умову, за якої трикутник перетне пряму $x=4$
3. Створити власну задачу для гри:
 - задати нові координати персонажа;
 - розмістити перешкоди;
 - описати рух вектором.

Варіанти диференціації (за процесом)

Базовий рівень

- Учні працюють із готовою координатною сіткою.
- Переміщують вершини трикутника за заданим вектором, додаючи координати.

- Визначають нові координати точок.

- Перевіряють, чи перетинається траєкторія зі стіною $x=4$.

Середній рівень

- Самостійно будують координатну площину.

Завдання 1: Переміщення трикутника до сховища

К(0;0)

Вектор $a(5;3)$

Стіна $x=4$

Двері Сховища

Нові координати: $K'(5;3)$, $L'(6;5)$, $M'(7;3)$

Перетин стіни $x=4$: Так, перетнув стіну!

Завдання 2: Переміщення персонажа 2

Двері D(50;80)

P(10;20)

Формула перенесення: $(x'; y') = (x + 40; y + 60)$

Кількість кроків: 10

- Наносять трикутник KLM.

- Виконують паралельне перенесення графічно та аналітично.

- Пояснюють, чому відбувається перетин зі стіною.

Достатній рівень/високий рівень

- Аналізують рух усіх вершин трикутника.

- Моделюють рух персонажа на координатній площині.

- Досліджують умови перетину зі стіною через зміну координати x .

- Пояснити математичну модель переміщення у вигляді формули.

Диференціація за результатом (що отримують учні)

Мінімальний результат

Учень:

- знаходить нові

координати точок після перенесення;

- розуміє принцип додавання вектора до координат.

Середній результат

Учень:

- визначає, чи перетинає персонаж перешкоду;

- записує формулу паралельного перенесення $(x', y') = (x + a; y + b)$

Високий результат

Учень:

- пояснює алгоритм руху персонажа;

- знаходить вектор переміщення між двома точками $\vec{PD} = (40; 60)$

- визначає кількість кроків при русі на вектор $\vec{v} = (4; 6)$

- робить висновок: $\frac{40}{4} = \frac{60}{6} = 10$

тобто персонаж зробить **10 кроків**.

Міжпредметна інтеграція

Завдання поєднує математику (вектори, координати), програмування (моделювання руху об'єкту у 2D-іграх, використання координат у комп'ютерній графіці – можливе практичне завдання: створити просту анімацію руху у Scratch / GeoGebra / Python), фізику (поняття переміщення;

напрямок і модуль вектора руху; моделювання траєкторії руху), мистецтво/дизайн (створення персонажів для гри, побудова графічних моделей, візуалізація математичних процесів)

Задача формує математичну компетентність, розвиває інформаційно – цифрові навички та критичне мислення, вміння розв’язувати проблеми та STEM – компетентності.

2.5.2.Оптимальна зупинка

Авторка: *Волкова Катерина Михайлівна, вчитель математики Черкаської гімназії №9 ім. О. М. Луценка Черкаської міської ради Черкаської області*

Муніципалітет планує будівництво зупинки на прямолінійному відрізку траси. Відомо, що будівля А (школа) розташована за 2 км від дороги, а будівля В (лікарня) — за 5 км. Відстань між проекціями будівель



на дорогу 9 км. Кошторис будівництва 1 погонного метра доріжки від зупинки до будівлі становить 1200 грн. Інженер-стажер стверджує, що зупинку треба ставити рівно посередині між проекціями точок А і В, щоб нікому не було образливо. Температура повітря під час замірів була 22 градуси.

Визначте, які дані в тексті не впливають на геометричне знаходження точки. Чи правий інженер-стажер?

Рівень 1 (Конструктор): Побудуйте точку для випадку, коли будівлі розташовані по один бік від шосе.

Рівень 2 (Аналітик): Обчислити точну відстань від проекції точки до оптимальної точки, використовуючи подібність трикутників.

Рівень 3 (Експерт): Як зміниться положення зупинки, якщо будівлі розташовані з різних боків від шосе? Чи вплине на розв'язок товщина самого шосе (наприклад, метрів), якщо ми розглядаємо його не як лінію, а як смугу? Виконай математичний розрахунок точного положення точки N на основі доданих числових даних (2 км, 5 км та 9 км).

Методичні рекомендації для вчителя

Задача сприяє розвитку просторового мислення, формує математичне моделювання, міжпредметні зв'язки. Під час дослідження учні працюють в парах, одна група досліджує координати; інша – аналізує перешкоди. При обговоренні результатів порівнюють математичний і програмний підхід, проводячи рефлексію, встановлюють де ще використовують вектори.

Очікувані результати навчання (відповідно до НУШ)

I. Предметна компетентність (математична):

Учень/учениця розуміє, чим відрізняється осьова симетрія від інших перетворень фігур, зображує та знаходить на рисунках образи і прообрази фігур при симетрії; співвідносить реальні об'єкти та процеси

навколишнього середовища з осьовою симетрією; застосовує цей рух та його властивості при розв'язуванні задач

II. Ключові компетентності:

Підприємливість та фінансова грамотність

Генерує нові ідеї, аналізує, ухвалює оптимальні рішення; розв'язує життєві проблеми; використовує різні стратегії

Навчання впродовж життя

Визначає мету діяльності, аналізує, перевіряє і оцінює результати навчальної діяльності; організовує та планує навчальну діяльність

Критичне мислення

Формується через активний аналіз практичної задачі, учень/учениця перевіряє твердження, ставить запитання «чому?», застосовує знання до реальних об'єктів

Спілкування державною мовою

Грамотно висловлюється державною мовою, обґрунтовує розв'язання, веде конструктивний діалог

III. Наскрізнi лінії

Під час дослідження завдання, крім формування ключових компетентностей, реалізуються такі наскрізні лінії, як «Підприємливість та фінансова грамотність», «Екологічна безпека» - через цифрове середовище, «Громадянська відповідальність» - через роботу в команді, «Інформаційна безпека».

Розв'язання:

Надлишкові та неточні дані, що не впливають на геометричне розв'язання:

- температура 22°
- призначення будівель (школа/лікарня)
- вартість 1200 грн/м
- твердження інженера про «справедливість»

Чи правий інженер – стажер?

Ні. Мінімум суми відстаней майже ніколи не знаходиться посередині.

Правильний метод – метод симетрії відносно прямої.

Рівень 1 : Конструктор (геометрична побудова)

Нехай : дорога – вісь x

проекція $A \rightarrow A'$

проекція $B \rightarrow B'$

розташуємо $A' (0;0)$, $B' (9;0)$

оскільки будівлі по один бік дороги: $A (0;2)$, $B (9 ;5)$

відобразимо точку B симетрично відносно дороги, отримаємо точку $B^*(9; -5)$, тоді

$$AN+BN=AN+NB=AN+NB^*$$

Отже , оптимальна точка N – перетин прямої AB^* з дорогою

Доведення через нерівність трикутника:

Для будь-якої точки M на дорозі

$AM + MB^* \geq AB^*$ (нерівність трикутника)

Рівність виконується лише тоді, коли точки лежать на одній прямій, отже, знайдена точка – єдина оптимальна.

Рівень 2: Аналітик (точний розрахунок)

Рівняння прямої AB^* , яка проходить через точки A і B^* має вид $7x + 9y = 18$

Знаходимо перетин з дорогою

Дорога $y=0$, $x = \frac{18}{7}$ км

$x \approx 2,57$ км

отже, $N(2,57; 0)$

відповідь: точка зупинки :

- 2,57 км від проекції A

- 6,43 км від проекції B

Мінімальна сумарна відстань дорівнює довжині $AB^* = \sqrt{9^2 + 7^2} = \sqrt{81 + 49} =$

$= \sqrt{130} \approx 11,40$ км

Чому стажер помилився?

Середина була б правильною лише, якщо $2=5$

(будівлі однаково віддалені від дороги), тут відстані різні $\rightarrow$ точка зміщується до ближчої будівлі

Рівень 3: Експерт (випадок : будівлі з різних боків дороги)

Тоді симетрія не потрібна.

Мінімальна сума відстаней досягається коли

Точка N – перетин прямої AB з дорогою, тобто люди йдуть по найкоротшому шляху.

Чи впливає товщина шосе?

Якщо дорога – смуга шириною w

- Оптимальна точка зміщується на дуже малу величину;

- При задачах шкільної геометрії дорогу вважають лінією

Отже, товщина не впливає на розв'язок.

Фінальний результат:

Оптимальне положення зупинки:

N розташована на $\frac{18}{7} \approx 2,57$ км від проекції A

Мінімальна сумарна відстань $\approx 11,40$ км

Інженер- стажер не правий

Орієнтовні критерії оцінювання

Рівень	МАО 1 аналіз ситуації	МАО 2 моделювання	МАО 3 критичне мислення	Бали
початковий	розпізнає дані	виконує обчислення з допомогою	працює за зразком	1-3

середній	частково будує модель	допускає неточності	Частково пояснює	4-6
достатній	правильно складає вираз	логічно доводить	робить висновки	7-9
високий	самостійно обґрунтовує метод	обґрунтовує альтернативні способи	аналізує вплив параметрів	10-12

Диференціація навчання

Диференціація за змістом

Базовий рівень

Учні працюють з геометричною ідеєю задачі.

Завдання:

- побудувати проекції точок A_0 і B_0 ;
- побудувати точку N методом відбиття точки;
- пояснити, чому ламана $AN+BN$ мінімальна.

Учні використовують:

- рисунок,
- геометричні міркування,
- нерівність трикутника.

Середній рівень

Учні працюють з алгебраїчною моделлю.

Завдання:

- ввести змінну x ;
- записати функцію

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{(9-x)^2+25}$$

- використати пропорцію подібних трикутників

$$\frac{x}{9-x} = \frac{2}{5}$$

Високий рівень

Учні досліджують оптимізаційну модель.

Завдання:

- дослідити функцію на мінімум;
- проаналізувати зміну результату, якщо:
 - відстань до школи 3 км;
 - лікарня 4 км;
 - між проекціями 12 км.

Варіанти диференціації за процесом

Варіант 1 — візуальний

Учні працюють з:

- інфографікою,
- геометричним кресленням,
- моделлю на координатній площині.

Варіант 2 — аналітичний

Учні:

- складають математичну модель;
- виконують обчислення;
- аналізують функцію.

Варіант 3 — дослідницький

Учні працюють у групах:

- 1 група — геометричне розв'язання,
- 2 група — алгебраїчне,
- 3 група — економічний аналіз вартості доріжок.

Потім результати порівнюються.

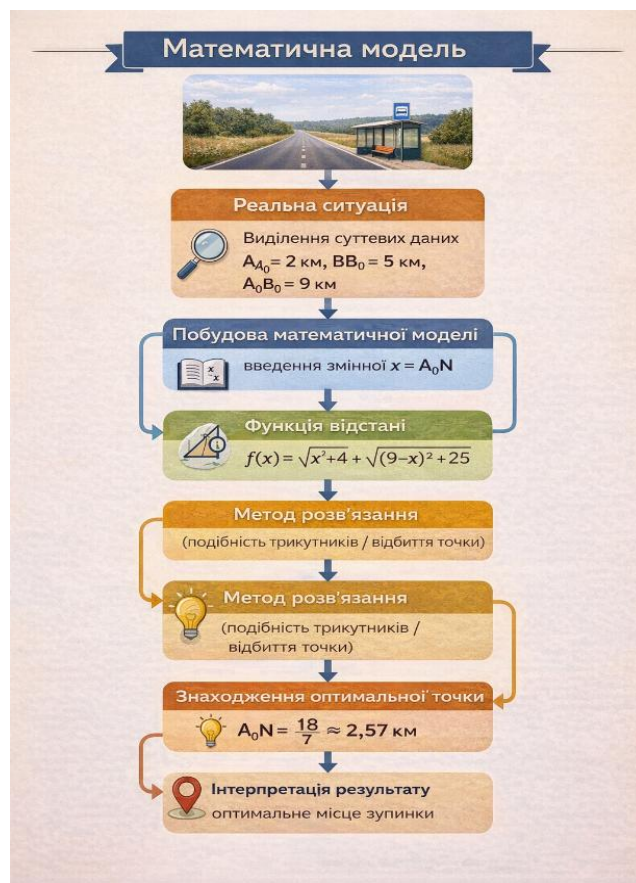
Диференціація за результатом

Учні можуть продемонструвати розуміння по-різному. Учень/учениця може створити такі варіанти продукту навчання:

- математичне розв'язання,
- інфографіку,
- презентацію
- модель у GeoGebra,
- пояснювальне відео,
- короткий інженерний звіт.

Міжпредметна інтеграція

Завдання поєднує математику (вектори, координати), географію (учні працюють з поняттями масштабу, відстані на місцевості, планування інфраструктури; можливе завдання : побудувати схему розташування будівель на карті масштабу 1: 50000); інформатику (учні можуть змодельовати задачу в GeoGebra – створити програму, що знаходить оптимальне положення зупинки); економіку/ фінансову грамотність (учні можуть порахувати вартість будівництва доріжок), фізику (поняття найкоротшого шляху, принцип мінімуму- можна провести аналогію з законом відбиття світла), громадянську освіту (як планується міська інфраструктура; як математичні моделі допомагають ухвалювати рішення).



2.5.3. Аварія на підприємстві

Авторка: *Волкова Катерина Михайлівна, вчитель математики Черкаської гімназії №9 ім. О. М. Луценка Черкаської міської ради Черкаської області*

Після аварії на підприємстві екологи досліджують можливе забруднення ґрунтів поблизу річки. Для аналізу використали топографічну карту масштабу 1:100000. На карті ділянка забруднення має форму трикутника. Довжини його сторін на карті становлять 3,2 см; 4,5 см; 5,1 см. Відомо, що :



- карта була надрукована 5 років тому;
- температура повітря під час дослідження становила + 18°C;

- частина території вкрита лісом;
- дослідники використовують дрон для уточнення меж забруднення;
- масштаб карти означає, що 1 см карти відповідає 1 км на місцевості.

Під час моделювання ситуації в комп'ютерній програмі трикутник було збільшено за допомогою гомотетії у 100000 разів, щоб отримати реальні розміри ділянки.

Основне питання: як зміниться площа ділянки забруднення на місцевості порівняно з її площею на карті?

Практично орієнтовані **завдання для диференціації:**

Рівень 1 (спрощений)

- поясніть, що означає масштаб 1 : 100000
- скільки кілометрів на місцевості відповідає 3,2 см на карті?
- які з наведених у задачі даних не впливають на математичне розв'язання?

Рівень 2 (базовий)

- знайдіть реальні довжини сторін трикутника на місцевості
- поясніть, що означає гомотетія з коефіцієнтом 100000
- як змінюється площа фігури, якщо всі її сторони збільшити у k разів?

Рівень 3 (достатній)

- знайдіть площу трикутника, використовуючи формулу Герона
- обчисліть приблизну площу ділянки на місцевості

Рівень 4 (високий)

- якщо очищення ґрунту коштує 120 тис. грн за 1 км², оцініть приблизну вартість рекультивації території

- запропонуйте ,як дрон може допомогти уточнити площу забруднення

Методичні рекомендації для вчителя

В процесі розв'язання задачі в учнів формується вміння працювати з масштабом; застосування гомотетії. Перед початком роботи учні отримують мотивуюче запитання: чи можна оцінити площу екологічної катастрофи, маючи лише карту?

Аналізуючи отриману в умові інформацію, учні визначають суттєві дані та надлишкові дані; на дослідницькому етапі працюють у групах (група 1 – масштаб, група 2 – площа трикутника, група 3- екологічні наслідки)

Очікувані результати навчання (відповідно до НУШ)

I. Предметна компетентність (математична):

Учень/учениця зображує та знаходить на рисунках подібні фігури; співвідносить реальні об'єкти та процеси навколишнього середовища з моделями подібних фігур і перетворенням подібності; розуміє як застосовувати масштаб , чим відрізняється перетворення подібності в загальному випадку від руху; усвідомлює , які фігури називають подібними; використовує властивість площ подібних фігур; застосовує перетворення подібності для розв'язування задач

II. Ключові компетентності:

Природничо-наукова компетентність

Досліджує математичні моделі природних об'єктів, робить висновки на основі реальних даних, обґрунтовує рішення; здійснює моніторинг довкілля

Інформаційно-цифрова компетентність

Визначає достатність даних для розв'язування задачі; здійснює пошук інформації з використанням інформаційно-комунікаційних засобів; оптимізує свою діяльність шляхом використання сучасних засобів комп'ютерної техніки; використовує комп'ютерне моделювання та картографічні дані

Екологічна компетентність

Усвідомлює масштаб екологічних проблем, що виникають у довкіллі; визнає роль математики в розв'язанні проблем довкілля; необхідність точних розрахунків

Спілкування державною мовою

Грамотно висловлюється державною мовою, обґрунтовує розв'язання, веде конструктивний діалог

III. Наскрізні лінії

Під час дослідження завдання ,крім формування ключових компетентностей, реалізуються такі наскрізні лінії , як «Підприємливість та фінансова грамотність» - вартість очищення території, «Екологічна безпека і сталий розвиток» - оцінка забруднення довкілля, Громадянська відповідальність» - через роботу в команді, «Інформаційна безпека».

Розв'язання:

Крок 1. Розуміння масштабу

Масштаб 1: 100000 означає: 1 см на карті дорівнює 1 км на місцевості

Крок 2. Реальні довжини сторін

3,2 см → 3,2 км

4,5 см → 4,5 км

5,1 см → 5,1 км

Крок 3. Площа трикутника на карті

Півпериметр:

$$P = (3,2 + 4,5 + 5,1) : 2 = 6,4$$

$$\text{Формула Герона } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \sqrt{6,4 * 3,2 * 1,9 * 1,3}$$

$$S \approx 7,1 \text{ см}^2$$

Крок 4. Як змінюється площа

Якщо фігуру збільшити у k разів, площа зміниться у k^2 разів

Крок 5. Обчислення

$$k = 100000$$

$$S_{\text{місцевості}} = S_{\text{карти}} * (100000)^2$$

$$S_{\text{місцевості}} = 7,1 * 10^{10} \text{ см}^2$$

Переведемо:

$$1 \text{ км}^2 = 10^{10} \text{ см}^2$$

Отже,

$$S_{\text{місцевості}} = 7,1 \text{ км}^2$$

Відповідь : площа збільшиться у 10^{10} разів

реальна площа забруднення приблизно 7,1 км²

Орієнтовні критерії оцінювання

<i>Рівень</i>	<i>МАО 1 аналіз ситуації</i>	<i>МАО 2 модельовання</i>	<i>МАО 3 критичне мислення</i>	<i>Бали</i>
початковий	учень розпізнає масштаб	використовує прості обчислення	працює за зразком	1-3
середній	виділяє необхідні дані	допускає неточності	перевіряє результат	4-6
достатній	формулює математичну проблему	застосовує гомотетію	пояснює розв'язання	7-9
високий	самостійно обґрунтовує метод	будує повну математичну модель	аналізує практичне значення результату	10-12

Диференціація за змістом

Учні працюють з різним обсягом або складністю математичного матеріалу

Початковий рівень

- пояснити значення масштабу: 1 : 100000;
- визначити, які дані в задачі зайві;
- встановити, у скільки разів змінюються довжини.

Середній рівень

- пояснити зв'язок між масштабом і гомотетією;
- встановити правило зміни площі при зміні довжини.

Достатній рівень

- знайти площу трикутника на карті за формулою Герона;

- визначити реальну площу забруднення.

Високий рівень

- оцінити частину площі, яку потрібно очистити;
- змодельовати час ліквідації забруднення;
- запропонувати власну математичну модель оцінки масштабу екологічної катастрофи.

Диференціація за процесом

Різні способи виконання навчальної діяльності

Варіанти роботи:

1. Індивідуальна робота
 - обчислення масштабу;
 - побудова алгоритму розв'язання.
2. Робота в парах:
 - аналіз надлишкових даних;
 - перевірка правильності обчислень.
3. Робота в групах:
 - моделювання екологічної ситуації;
 - створення міні – презентації.
4. Дослідницький підхід:
 - використання онлайн-карт;
 - порівняння реальних екологічних випадків.

Диференціація за результатом

Учні демонструють результат у різних формах

Базовий результат: - задача розв'язана з поясненням

Розширений результат: - схема або блок-модель задачі

Творчий результат - інфографіка процесу розв'язання;

- міні-проект «Оцінка площі екологічного забруднення»

Дослідницький результат: - презентація або постер із математичною Моделлю.

Під час розв'язання задачі формується критичне мислення, уміння проводити аналіз інформації, моделювати реальні ситуації, розвивається екологічна свідомість. Здійснюється міжпредметна інтеграція географії (робота з картами, визначення реальних відстаней, використовується поняття масштабу), екології (розглядається вплив забруднення на ґрунти, екологічний моніторинг територій, оцінка екологічних ризиків), економіки (оцінка вартості очищення територій, планування ресурсів), хімії (дослідження складу ґрунту, визначення концентрації забруднювачів), інформатики (комп'ютерне моделювання, створення інфографіки).

Диференціація навчання під час розв'язання задачі (НУШ)



1 Диференціація за змістом

Учні працюють з різним обсягом або складністю математичного матеріалу.

Початковий рівень

- пояснити значення масштабу
- визначити, які дані в задачі зайві;
- встановити у скільки разів змінюються довжини.



Високий рівень

- оцінити частину площі, яку потрібно очистити.
- змодельовати час ліквідації забруднення.

2 Диференціація за процесом

Різні способи виконання навчальної діяльності.

Індивідуальна робота

- обчислення масштабу 1:100,0000;
- встановити прямило зміни площі при зміні дожин.

Робота в парах

- аналіз надшишкових даних,
- перевірка правильності обчислень.

Дослідницький підхід

- використання очляги карт;
- порівняння реальних екологічних випадків.



3 Диференціація за результатом

Учні демонструють результат у різних формах.

Варіанти роботи

- **Індивідуальна** робота
- Обчислення масштабу
- побудова алгоритму розв'язання.



Робота в групах

- моделювання екологічної ситуації.
- створення міні-презентації.

Базовий результат

- розв'язана задача з поданням



Розвиток ключових компетентостей



критичне мислення



аналіз інформації



уміння моделювати реальні ситуації.



аналіз інформації



моделювання реальних ситуацій



презентація

2.6. Крок у простір: знайомство зі стереометрією

2.6.1. Проєкт «Космічний модуль для дослідницької станції»

Авторка: *Бедусенко Ольга Сергіївна, вчитель математики
Леськівського ліцею з початковою школою та гімназією
Леськівської сільської ради Черкаського району
Черкаської області*

Інженери розробляють космічний модуль для майбутньої української орбітальної станції. Модуль складається з двох частин:

- основа — прямокутний паралелепіпед;
- верхня частина — правильна чотирикутна піраміда.



Параметри модуля:

- довжина основи паралелепіпеда — 6 м,
- ширина — 4 м,
- висота паралелепіпеда — 3 м,
- висота піраміди — 2 м.

Завдання:

1. Назвіть усі види многогранників, які входять до конструкції модуля. Скільки граней, ребер і вершин має кожен із них?

2. Скільки всього вершин має вся конструкція?

3. Знайдіть площу підлоги модуля.

4. Знайдіть об'єм усього космічного модуля. (Дослідницьке завдання)

Інженери хочуть замінити піраміду на напівсферу.

- Яка фігура з точки зору стереометрії з'явиться в конструкції?
- Чим вона відрізняється від многогранника?

Очікувані результати навчання

I. Предметні результати (геометрична компетентність)

Після виконання завдання учень / учениця:

- Розпізнає просторові геометричні тіла (прямокутний паралелепіпед, піраміда, сфера).
- Називає елементи многогранників: вершини, ребра, грані.
- Визначає кількість вершин, ребер і граней просторових тіл.
- Застосовує формули для обчислення площі основи та об'єму просторових тіл.
- Обчислює об'єм складеної просторової конструкції.

- Розуміє різницю між многогранниками та тілами обертання.
- Інтерпретує геометричну модель у прикладному контексті (інженерна конструкція).

II. Ключові компетентності (відповідно до НУШ)

✓ Математична компетентність

- застосовує знання формул у реальній ситуації;
- аналізує складену просторову конструкцію.

✓ Інженерне та просторове мислення (STEM)

- розвиває просторову уяву;
- моделює об'єкти за допомогою геометричних тіл;
- бачить зв'язок між геометрією та технічним проєктуванням.

✓ Інформаційно-цифрова компетентність

- може створити 3D-модель конструкції;
- використовує цифрові інструменти для візуалізації.

✓ Уміння навчатися протягом життя

- аналізує нові типи задач;
- працює з інформацією;
- співпрацює в групі (за потреби).

III. Наскрізнi вміння

Учень / учениця:

- логічно обґрунтовує відповіді;
- використовує математичну термінологію;
- працює з кресленнями та моделями;
- робить узагальнення;
- формулює висновки повними реченнями.

Очікуваний підсумковий результат уроку

Учні повинні вміти:

- описувати складені просторові фігури;
- визначати їхні елементи;
- обчислювати площі та об'єми;
- пояснювати практичне застосування стереометрії.

Мотивація навчальної діяльності:

У сучасному світі космічні технології стрімко розвиваються, і Україна також бере участь у створенні орбітальних станцій та космічних модулів. Конструювання таких об'єктів вимагає точних математичних розрахунків, адже навіть незначна помилка може вплинути на безпеку та ефективність роботи всієї системи.

Учням пропонується реальна інженерна ситуація проєктування космічного модуля. Виникає проблема: як визначити характеристики складної просторової конструкції, що складається з кількох геометричних тіл, не обчислюючи кожен елемент окремо. Це спонукає до вивчення

многогранників, їх елементів, а також способів обчислення площ і об'ємів як інструментів моделювання реальних об'єктів.

Проблемні запитання: «Як визначити об'єм складної конструкції, якщо вона складається з кількох геометричних тіл?»; «Чи можна змінити форму частини модуля (наприклад, піраміду на напівсферу), щоб покращити його характеристики?»; «Чому різні геометричні форми можуть мати однаковий об'єм, але різні властивості та застосування?»; «Як інженери обирають оптимальну форму конструкції для роботи в космосі?»

Розв'язання

1. Які многогранники входять до конструкції?

1) Прямокутний паралелепіпед:

- 6 граней
- 12 ребер
- 8 вершин

2) Правильна чотирикутна піраміда:

- 5 граней
- 8 ребер
- 5 вершин

2. Скільки всього вершин має конструкція?

Піраміда встановлена на верхній грані паралелепіпеда, тому 4 вершини її основи збігаються з вершинами верхньої грані паралелепіпеда.

Обчислюємо:

$$8 + 5 - 4 = 9$$

Всього 9 вершин.

3. Площа підлоги модуля

Підлога – це прямокутник: $S = a \cdot b, S = 6 \cdot 4 = 24 \text{ м}^2$

Отже, площа підлоги - 24 м^2 .

4. Об'єм паралелепіпеда

$$V_1 = a \cdot b \cdot h_1, V_1 = 72 \text{ м}^3$$

5. Об'єм піраміди

$$V_2 = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h_2, V_2 = 16 \text{ м}^3.$$

6. Загальний об'єм модуля

$$V = V_1 + V_2 \\ V = 72 + 16 = 88 \text{ м}^3$$

Отже, загальний об'єм становить 88 м^3 .

Дослідницьке завдання

Якщо піраміду замінити на напівсферу:

- з'являється **тіло обертання**;
- напівсфера не є многогранником;
- вона має **криву поверхню**, а не плоскі грані.

Орієнтовні критерії оцінювання

<i>Рівень / Бали</i>	<i>МАО1 Дослідження ситуації</i>	<i>МАО2 Моделювання</i>	<i>МАО3 Оцінювання результату</i>
Початковий 1–3 бали	Частково розуміє умову задачі; не розрізняє геометричні тіла конструкції; потребує допомоги	За зразком записує формули площі та об'єму; не розуміє будову тіл і їх елементів	Дає відповіді без пояснення або з помилками; не інтерпретує результат у контексті задачі
Середній 4–6 балів	З підказкою визначає види геометричних тіл; частково встановлює їх елементи (грані, ребра, вершини)	Виконує обчислення площі та об'єму з допомогою; допускає незначні помилки у формулах або обчисленнях	Дає короткі відповіді (об'єм, площа, кількість вершин), але без повного пояснення їх змісту для конструкції
Достатній 7–9 балів	Самостійно аналізує конструкцію; правильно визначає всі геометричні тіла та їх елементи	Самостійно обчислює площу підлоги, об'єми тіл і загальний об'єм; правильно застосовує формули	Пояснює результати: враховує спільні елементи, інтерпретує об'єм і площу в контексті космічного модуля
Високий 10–12 балів	Глибоко аналізує задачу; робить узагальнення про геометричну будову конструкції	Раціонально будує модель; оптимізує обчислення; розглядає альтернативи (наприклад, заміна піраміди на напівсферу)	Аргументовано оцінює результати; пояснює відмінність між многогранниками і тілами обертання; робить практичні висновки щодо конструкції

Можливі варіанти диференціації

Можливі варіанти диференціації

- Диференціація здійснюється за:
- змістом (що вивчаємо),
- процесом (як працюємо),
- результатом (що отримуємо).

1. Диференціація за змістом (рівень складності матеріалу)

Для учнів, які потребують підтримки

- Надати готовий рисунок конструкції з підписаними елементами.
- Запропонувати окремо знайти:
 - лише об'єм паралелепіпеда;
 - лише кількість граней.
- Використати простіші числа (наприклад $4 \times 3 \times 2$).
- Дати формули в готовому вигляді.

Для учнів середнього рівня

- Самостійно визначити, які формули потрібно застосувати.

- Обчислити загальний об'єм конструкції.
- Пояснити різницю між многогранником і тілом обертання.

Для сильних учнів

- Додаткове завдання:
 - ✓ Знайти площу бічної поверхні піраміди.
 - ✓ Визначити масу модуля, якщо 1 м^3 матеріалу має масу 250 кг.
 - ✓ Запропонувати альтернативну форму верхньої частини (конус, напівсфера) та порівняти об'єми.
 - ✓ Дослідити, як зміниться об'єм, якщо збільшити всі розміри в 2 рази.

2. Диференціація за процесом (способи виконання)

✓ Індивідуальна робота

- Учень самостійно виконує обчислення.
- Працює з кресленням.

✓ Парна робота

- Один учень відповідає за обчислення,
- інший — за пояснення та аргументацію.

✓ Групова робота

- Групи створюють 3D-модель з паперу або в цифровій програмі.
- Презентують власне інженерне рішення.

3. Диференціація за результатом (кінцевий продукт)

Обов'язковий результат

- Правильно обчислений об'єм.
- Правильно визначені елементи тіл.

Додатковий результат

- Міні-презентація «Проект космічного модуля».
- Створення паперової або цифрової 3D-моделі.
- Пояснювальна записка (де застосовується стереометрія в реальному житті).

4. Підтримка учнів з різним темпом навчання

- Картки-підказки з формулами.
- Алгоритм розв'язання:
- Визначити фігуру.
- Записати формулу.
- Підставити значення.
- Виконати обчислення.
- Частково заповнені таблиці для обчислень.

5. Інклюзивний аспект

- Використання об'ємних моделей для кращого сприйняття.
- Візуалізація через презентацію.
- Чіткий покроковий алгоритм.

- Усне пояснення замість письмового (за потреби).

Результат диференціації

Кожен учень:

- досягає обов'язкового мінімуму;
- працює на своєму рівні складності;
- має можливість проявити творчість.

Міжпредметна інтеграція:

Інформатика / STEM – комп'ютерне моделювання космічного модуля; побудова 3D-моделей; автоматизація обчислень площ і об'ємів; візуалізація конструкції.

Астрономія / космічні технології – застосування геометрії під час проектування орбітальних станцій; врахування умов космосу (герметичність, форма, міцність конструкції).

Математика – використання знань про многогранники та тіла обертання; обчислення площ, об'ємів; аналіз просторових форм і їх властивостей.

КОСМІЧНИЙ МОДУЛЬ:
ЯК ДОПОМАГАЄ МАТЕМАТИКА?

ПАРАМЕТРИ МОДУЛЯ
6 м × 4 м × 3 м
Піраміда зверху: h = 2 м

ГЕОМЕТРІЯ
Геометричні тіла:
Прямокутний паралелепіпед: 6 граней, 12 ребер, 8 вершин
Чотирикутна піраміда: 5 граней, 8 ребер, 5 вершин

МАТЕМАТИКА
Площа підлоги: $S = 6 \times 4 = 24 \text{ м}^2$
Об'єм модуля: $V = 6 \times 4 \times 3 + \frac{1}{3} \times 6 \times 4 \times 2 = 72 \text{ м}^3 + 16 \text{ м}^3 = 88 \text{ м}^3$

ЗАВДАННЯ
1 Назви геометричні тіла
2 Знайди площу та об'єм
3 Порахуй вершини

РЕЗУЛЬТАТ:
МАТЕМАТИКА ДОПОМАГАЄ СТВОРЮВАТИ ЕФЕКТИВНІ КОСМІЧНІ КОНСТРУКЦІЇ!

Фізика – врахування об'єму і форми для розподілу тиску, стійкості конструкції та умов невагомості; аналіз міцності матеріалів.

Інженерія – проектування складних конструкцій із різних геометричних тіл; оптимізація форми модуля для практичного використання.

Економіка – оцінка витрат на створення модуля; вибір оптимальної форми для зменшення матеріалів і підвищення ефективності.

Громадянська освіта – усвідомлення ролі України у розвитку космічної галузі; формування відповідальності за науково-технічний прогрес.

Фінансова грамотність – планування ресурсів для створення космічних об'єктів; оцінка

доцільності змін у конструкції.

Екологія – врахування впливу космічних технологій на довкілля; раціональне використання матеріалів і ресурсів.

2.6.2. Проєкт «Скляний арт-об'єкт у центрі міста»

Авторка: *Бедусенко Ольга Сергіївна, вчитель математики
Леськівського ліцею з початковою школою та гімназією
Леськівської сільської ради Черкаського району
Черкаської області*

У центрі міста планують встановити сучасний скляний арт-об'єкт.
Конструкція складається з:



- циліндра (прозора основа),
- зверху розміщено **конус** зі скла,
- всередині конструкції проходить світлова трубка у формі прямої призми.

Параметри:

- радіус циліндра — 3 м,
- висота циліндра — 5 м,
- висота конуса — 4 м,
- світлова трубка — пряма трикутна призма з висотою 5 м та площею основи 2 м^2 .

Завдання:

1. Назвіть усі геометричні тіла, що входять до конструкції. Які з них є многогранниками, а які — тілами обертання?

2. Знайдіть об'єм циліндра.

3. Знайдіть об'єм конуса.

4. Знайдіть об'єм світлової трубки (призми).

5. Обчисліть загальний об'єм арт-об'єкта (без урахування порожнин).

6. (Дослідницьке)

Як зміниться об'єм усієї конструкції, якщо радіус збільшити в 2 рази?

Чи збільшиться об'єм у 2 рази? Поясніть.

Очікувані результати навчання

I. Предметні результати (геометрична компетентність)

Після виконання завдання учень / учениця:

1. Розпізнає просторові геометричні тіла:
 - циліндр;
 - конус;
 - пряму призму.
2. Розрізняє:
 - многогранники (призма),
 - тіла обертання (циліндр, конус).
3. Називає та описує елементи тіл:

- основи,
 - висоту,
 - радіус,
 - бічну поверхню.
4. Застосовує формули:
 - об'єму циліндра
 - об'єму конуса
 - об'єму призми
 5. Обчислює об'єм складеної просторової конструкції.
 6. Аналізує зміну об'єму при масштабуванні (зміна радіуса).
 7. Пояснює залежність між лінійними розмірами та об'ємом тіла.

II. Ключові компетентності (відповідно до НУШ)

- ✓ Математична компетентність
 - застосовує формули в реальному контексті;
 - виконує обґрунтовані обчислення;
 - аналізує результат.
- ✓ Інженерне та просторове мислення (STEM)
 - моделює реальні об'єкти за допомогою геометричних тіл;
 - працює з тривимірними образами;
 - розвиває просторову уяву.
- ✓ Інформаційно-цифрова компетентність
 - може використати калькулятор або цифрову модель;
 - аналізує геометричну конструкцію через візуалізацію.
- ✓ Підприємливість та ініціативність
 - оцінює масштабування об'єкта;
 - розуміє практичне застосування геометрії в дизайні.

III. Наскрізні вміння

Учень / учениця:

- логічно структурує розв'язання;
- аргументує висновки;
- використовує математичну термінологію;
- пояснює залежності між величинами;
- робить узагальнення.

Очікуваний підсумковий результат уроку

Учні повинні вміти:

- визначати тип просторового тіла;
- правильно застосовувати формули об'єму;
- обчислювати об'єм складених тіл;
- пояснювати, як змінюється об'єм при зміні розмірів;
- бачити зв'язок між геометрією та сучасним дизайном.

Мотивація навчальної діяльності:

У сучасних містах все більшої популярності набувають інноваційні арт-об'єкти та архітектурні інсталяції, які поєднують естетику, технології та інженерні рішення. Проектування таких конструкцій потребує точних

математичних розрахунків, адже від цього залежить їхня стійкість, безпека та ефективність використання матеріалів.

Учням пропонується реальна ситуація створення скляного арт-об'єкта, що складається з кількох геометричних тіл. Виникає проблема: як визначити об'єм складної конструкції та проаналізувати її характеристики, не розглядаючи кожну частину ізольовано. Це спонукає до вивчення тіл обертання і многогранників, а також способів обчислення об'ємів як інструментів для моделювання реальних об'єктів.

Проблемні запитання: «Як визначити загальний об'єм конструкції, якщо вона складається з кількох геометричних тіл?»; «Чому при зміні радіуса об'єм конструкції змінюється не пропорційно?»; «Як форма впливає на зовнішній вигляд і функціональність арт-об'єкта?»; «Як інженери та дизайнери обирають оптимальну форму для міських інсталяцій?»

Розв'язання:

1. Геометричні тіла

- Циліндр — тіло обертання
- Конус — тіло обертання
- Трикутна призма — многогранник

2. Об'єм циліндра

$$V = \pi r^2 h, \quad V = 45\pi \approx 141,3 \text{ м}^3$$

3. Об'єм конуса

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h, \quad V = 12\pi \approx 37,7 \text{ м}^3$$

4. Об'єм призми

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h, \quad V = 10 \text{ м}^3$$

5. Загальний об'єм (без урахування порожнин)

$$V = 45\pi + 12\pi + 10 = 57\pi + 10 \approx 189 \text{ м}^3$$

6. Дослідницьке завдання

Якщо радіус збільшити в 2 рази:

у формулах об'єму є r^2 , тому: $(2r)^2 = 4r^2$,

то об'єм збільшиться у 4 рази, а не в 2.

Отже, об'єм залежить від квадрата радіуса, тому збільшення радіуса в 2 рази дає збільшення об'єму в 4 рази.

Орієнтовні критерії оцінювання

<i>Рівень / Бали</i>	<i>МАО1 Дослідження ситуації</i>	<i>МАО2 Моделювання</i>	<i>МАО3 Оцінювання результату</i>
Початковий 1–3 бали	Частково розуміє умову задачі; не розрізняє геометричні тіла конструкції; потребує допомоги	За зразком записує формули об'ємів; не розуміє різницю між тілами обертання і многогранниками	Дає відповіді без пояснення або з помилками; не пов'язує результат з реальною конструкцією

Середній 4–6 балів	З підказкою визначає геометричні тіла; частково розуміє їх класифікацію	Виконує обчислення об'ємів з допомогою; допускає незначні помилки у формулах або обчисленнях	Дас короткі відповіді (об'єми), але без повного пояснення їх значення для арт-об'єкта
Достатній 7–9 балів	Самостійно аналізує конструкцію; правильно визначає тіла та їх типи (обертання/многогранники)	Самостійно обчислює об'єми циліндра, конуса, призми та загальний об'єм; правильно застосовує формули	Пояснює результати; інтерпретує об'єм у контексті конструкції; пояснює залежність об'єму від радіуса
Високий 10–12 балів	Глибоко аналізує задачу; робить узагальнення щодо геометричної будови та властивостей конструкції	Раціонально будує модель; враховує залежності (наприклад, (r^2)); досліджує зміну параметрів	Аргументовано оцінює результати; пояснює масштабування об'єму; робить практичні висновки щодо дизайну та ефективності арт-об'єкта

Можливі варіанти диференціації

Можливі варіанти диференціації

Диференціація здійснюється за:

- ✓ змістом
- ✓ процесом
- ✓ результатом
- ✓ рівнем підтримки

1. Диференціація за змістом (рівень складності)

Для учнів, які потребують підтримки

- Надати готові формули об'ємів.
- Запропонувати окремо знайти:
 - лише об'єм циліндра;
 - лише об'єм призми.
- Дати числові значення без π (наприклад, $\pi \approx 3$).
- Запропонувати частково заповнену таблицю обчислень.

Для учнів середнього рівня

- Самостійно визначити, які формули потрібно застосувати.
- Обчислити загальний об'єм конструкції.
- Пояснити, чому об'єм залежить від квадрата радіуса.

Для сильних учнів

Додаткові завдання:

- Знайти площу бічної поверхні циліндра.

- Знайти площу повної поверхні всієї конструкції.
- Обчислити масу об'єкта, якщо густина скла 2500 кг/м^3 .
- Дослідити, як зміниться об'єм, якщо всі розміри збільшити в 1,5 рази.
- Порівняти об'єм конуса і циліндра при однакових основах і висотах

2. Диференціація за процесом (спосіб роботи)

✓ Індивідуальна робота

- Самостійні обчислення.
- Запис повного розв'язання.

✓ Робота в парах

- Один учень обчислює.
- Другий перевіряє та пояснює логіку.

✓ Групова робота

- Одна група працює з циліндром.
- Друга — з конусом.
- Третя — з призмою.
- Потім об'єднують результати.

3. Диференціація за результатом (кінцевий продукт)

Обов'язковий результат

- Правильно обчислений загальний об'єм.
- Правильна класифікація тіл.

Додатковий результат

- Міні-презентація «Геометрія в сучасному дизайні».
- 3D-модель у GeoGebra або Tinkercad.
- Інфографіка «Як змінюється об'єм при масштабуванні».

4. Диференціація за рівнем підтримки

Для учнів, яким складно:

Алгоритм розв'язання:

- Визнач фігуру.
- Запиши формулу.
- Підстав значення.
- Обчисли.
- Додай до загального об'єму.
- Картки-підказки з формулами.
- Візуалізація на моделі або презентації.

5. Інклюзивний підхід

Використання об'ємних моделей.

Візуальна схема конструкції.

Усний захист замість письмового пояснення (за потреби).

Поділ великого завдання на малі кроки.

Міжпредметна інтеграція:

Інформатика / STEM – комп'ютерне моделювання арт-об'єкта; побудова 3D-моделей; автоматизація обчислень об'ємів; візуалізація конструкції.

Мистецтво / дизайн – створення естетичного вигляду інсталяції; поєднання геометричних форм для досягнення візуального ефекту.

Математика – використання знань про тіла обертання і многогранники; обчислення об'ємів; аналіз залежності об'єму від параметрів (радіуса, висоти).

Фізика – врахування стійкості конструкції, розподілу маси та навантаження; властивості матеріалів (скло, освітлення).

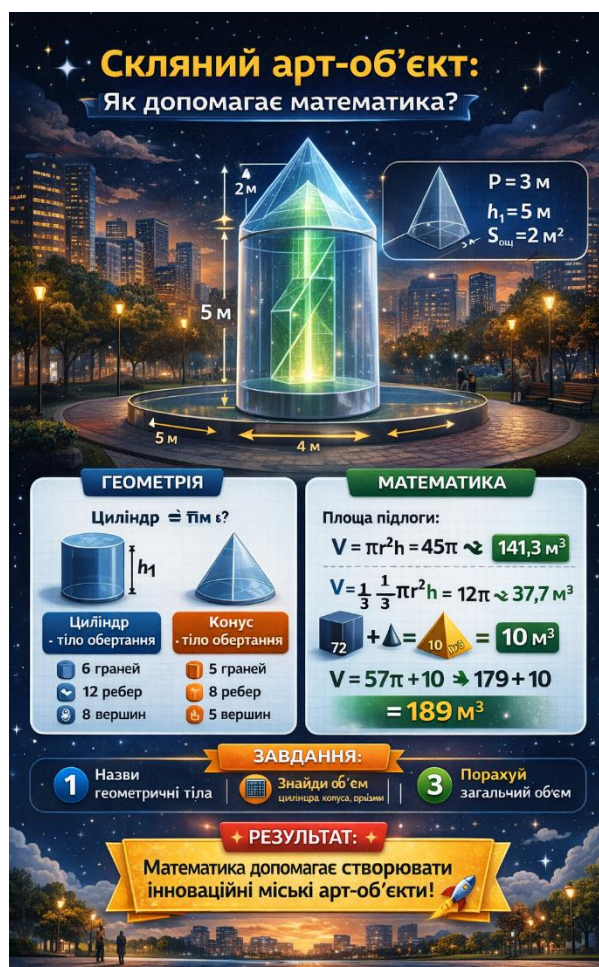
Інженерія – проєктування складної конструкції з кількох геометричних тіл; оптимізація форми для безпечного використання.

Економіка – оцінка витрат на матеріали та виготовлення; вибір оптимальних розмірів для ефективності.

Громадянська освіта – вплив арт-об'єктів на міський простір; формування естетичного середовища та культурної цінності.

Фінансова грамотність – планування бюджету проєкту; аналіз доцільності змін параметрів конструкції.

Екологія – використання екологічних матеріалів; оцінка впливу об'єкта на навколишнє середовище.



2.6.3.Сцена-трансформер для концерту

Авторка: *Бедусенко Ольга Сергіївна, вчитель математики
Леськівського ліцею з початковою школою та гімназією
Леськівської сільської ради Черкаського району
Черкаської області*

До міста приїздить всесвітньо відомий гурт Coldplay. Для їхнього виступу планують встановити унікальну сцену-трансформер, яка може змінювати форму під час концерту.



Конструкція сцени складається з кількох просторових тіл:

- Основа - прямокутний паралелепіпед;
- центральна підйомна платформа - циліндр;
- верхня частина, що піднімається під час шоу - конус;
- всередині проходить технічний блок у формі прямої призми.

Параметри:

- розміри основи: $14\text{ м} \times 10\text{ м} \times 2\text{ м}$;
- радіус циліндра - 3 м, висота - 4 м;
- висота конуса - 5 м, радіус основи - 3 м;
- технічний блок - пряма

чотирикутна призма з висотою 4 м і площею основи 6 м^2 .

Завдання:

1. Назвіть усі геометричні тіла, що входять до конструкції. Які з них є многогранниками, а які - тілами обертання?
2. Знайдіть об'єм основи сцени (прямокутного паралелепіпеда).
3. Знайдіть об'єм центральної платформи (циліндра).
4. Знайдіть об'єм верхньої частини (конуса).
5. Знайдіть об'єм технічного блоку (призми).
6. Обчисліть загальний об'єм сцени (без урахування можливих накладань конструкцій).
7. Поясніть, як розташовані геометричні тіла у просторі та які з них мають спільні основи або осі.

Очікувані результати навчання

I. Предметні результати (геометрична компетентність)

Після виконання завдання учень / учениця:

1. Розпізнає просторові геометричні тіла:

- прямокутний паралелепіпед;
 - циліндр;
 - конус;
 - пряму призму.
2. **Розрізняє:**
 - многогранники (паралелепіпед, призма),
 - тіла обертання (циліндр, конус).
 3. **Називає та описує елементи тіл:**
 - основи;
 - висоту;
 - радіус;
 - ребра та грані;
 - бічну поверхню.
 4. **Застосовує формули:**
 - об'єму прямокутного паралелепіпеда;
 - об'єму циліндра;
 - об'єму конуса;
 - об'єму призми.
 5. **Обчислює об'єм складеної просторової конструкції (сцени-трансформера).**
 6. **Аналізує розташування тіл у просторі:**
 - спільні основи;
 - співвісність (циліндр і конус);
 - розміщення внутрішніх елементів.
 7. **Досліджує зміну об'єму при зміні висоти конструкції (трансформація сцени).**
 8. **Пояснює залежність між лінійними розмірами та об'ємом тіла на практичному прикладі сцени.**

II. Ключові компетентності (відповідно до НУШ)

✓ Математична компетентність

- застосовує формули в реальному контексті (концертна сцена);
- виконує обґрунтовані обчислення;
- аналізує отримані результати.

✓ Інженерне та просторове мислення (STEM)

- моделює сцену як сукупність геометричних тіл;
- працює з тривимірними конструкціями;
- розвиває просторову уяву.

✓ Інформаційно-цифрова компетентність

- може використовувати цифрові інструменти для обчислень;
- аналізує 3D-модель сцени.

✓ Підприємливість та ініціативність

- оцінює зміну конструкції при трансформації;
- розуміє практичне застосування геометрії у сценічному дизайні.

✓ Культурна компетентність

- усвідомлює роль геометрії у створенні сучасних концертних шоу;
- поєднує математику з мистецтвом і дизайном.

III. Наскрізнi вміння

Учень / учениця:

- логічно структурує розв'язання задачі;
- аргументує висновки;
- використовує математичну термінологію;
- встановлює зв'язки між величинами;
- аналізує реальні ситуації через математичні моделі;
- робить узагальнення.

Очікуваний підсумковий результат уроку

Учні повинні вміти:

- визначати типи просторових тіл у реальних об'єктах;
- правильно застосовувати формули об'єму;
- обчислювати об'єм складених конструкцій;
- аналізувати зміни об'єму при трансформації;
- пояснювати просторове розташування тіл;
- бачити зв'язок між геометрією, технологіями та сучасними шоу.

Мотивація навчальної діяльності:

У сучасному світі концертні шоу стають високотехнологічними проектами, де поєднуються музика, світлові ефекти та інженерні конструкції. Під час виступів відомих гуртів, таких як Coldplay, використовуються сцени-трансформери, які змінюють форму прямо під час концерту.

Проектування таких сцен потребує точних математичних розрахунків, адже від цього залежить не лише ефектність шоу, а й безпека конструкції, її стійкість та раціональне використання матеріалів.

Учням пропонується змодельовати реальну ситуацію створення сцени, яка складається з кількох просторових геометричних тіл. Виникає проблема: як визначити об'єм складної конструкції та зрозуміти, як змінюються її характеристики під час трансформації. Це спонукає до вивчення многогранників і тіл обертання як інструментів для опису реальних об'єктів і сучасних технологій.

Проблемні запитання:

- «Як визначити загальний об'єм сцени, якщо вона складається з кількох геометричних тіл?»
- «Як зміниться об'єм конструкції, якщо змінюється висота або радіус її частин?»
- «Чому трансформація сцени впливає не лише на вигляд, а й на її геометричні характеристики?»
- «Як геометрія допомагає інженерам створювати безпечні та ефектні сценічні конструкції?»

• «Які геометричні форми є найзручнішими для створення мобільних сцен?»

Розв'язання:

1. Об'єм основи сцени (прямокутний паралелепіпед)

Формула: $V = a \cdot b \cdot h$, $V = 280 \text{ м}^3$.

2. Об'єм циліндра (центральна платформа)

Формула та обчислення: $V = \pi r^2 h$, $V \approx 113,04 \text{ м}^3$.

3. Об'єм конуса (верх сцени)

Формула та обчислення: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, $V \approx 47,1 \text{ м}^3$

4. Об'єм призми (технічний блок)

Формула та обчислення: $V = S_{\text{осн}} \cdot h$, $V = 24 \text{ м}^3$.

5. Загальний об'єм сцени

$V_{\text{загальне}} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$, $V \approx 464,14 \text{ м}^3$.

6. Дослідницьке завдання (трансформація сцени)

Якщо висота циліндра збільшується в 2 рази (з 4 м до 8 м), то об'єм збільшився у 2 рази, бо висота входить у формулу лінійно.

Висновок:

- Об'єм сцени — це сума об'ємів усіх її частин.
- При зміні висоти об'єм змінюється пропорційно.
- При зміні радіуса — об'єм змінюється швидше.
- Геометрія допомагає точно проектувати реальні конструкції, такі як концертні сцени.

Орієнтовні критерії оцінювання

Рівень / Бали	МАО1 Дослідження ситуації	МАО2 Моделювання	МАО3 Оцінювання результату
Початковий 1–3 бали	Частково розуміє умову задачі; не розрізняє елементи сцени та геометричні тіла; потребує значної допомоги	За зразком записує окремі формули об'ємів; не розрізняє тіла обертання і многогранники	Дає відповіді без пояснення або з помилками; не пов'язує результат із конструкцією сцени
Середній 4–6 балів	З підказкою визначає складові сцени (паралелепіпед, циліндр, конус, призма); частково розуміє їх будову	Виконує обчислення об'ємів з допомогою; допускає незначні помилки у формулах або обчисленнях	Дає короткі відповіді (об'єми), але без пояснення їх значення для роботи сцени
Достатній 7–9 балів	Самостійно аналізує конструкцію сцени; правильно визначає всі геометричні тіла та їх типи	Самостійно обчислює об'єми всіх частин сцени та загальний об'єм; коректно застосовує формули	Пояснює результати; інтерпретує об'єм у контексті сцени; пояснює зміну об'єму при трансформації
Високий 10–12 балів	Глибоко аналізує сцену-трансформер; встановлює зв'язки між елементами	Будує математичну модель сцени; враховує залежності між параметрами	Аргументовано оцінює результати; пояснює вплив змін на об'єм і стійкість;

	конструкції; робить узагальнення	(радіус, висота); досліджує зміну конструкції	робить практичні висновки щодо дизайну сцени
--	-------------------------------------	---	--

Можливі варіанти диференціації

Диференціація здійснюється за:

- ✓ змістом
- ✓ процесом
- ✓ результатом
- ✓ рівнем підтримки

1. Диференціація за змістом (рівень складності)

Для учнів, які потребують підтримки

- Надати готові формули об'ємів (паралелепіпеда, циліндра, конуса, призми).
- Запропонувати обчислити окремо: лише об'єм основи сцени (паралелепіпеда); лише об'єм циліндра.
- Дати спрощені обчислення ($\pi \approx 3$).
- Надати частково заповнену таблицю обчислень.
- Використати схему сцени з підписаними елементами.

Для учнів середнього рівня

- Самостійно визначити, які формули потрібно застосувати.
- Обчислити об'єм кожної частини сцени.
- Знайти загальний об'єм конструкції.
- Пояснити, як розташовані тіла у просторі.

Для сильних учнів

- Додаткові завдання:
- Знайти площу бічної поверхні циліндра.
- Знайти площу повної поверхні сцени.
- Дослідити, як зміниться об'єм при збільшенні висоти циліндра (трансформація сцени).
- Обчислити масу конструкції, якщо задана густина матеріалу.
- Порівняти об'єми циліндра і конуса при однакових основах і висотах.
- Запропонувати власну модель сцени-трансформера.

2. Диференціація за процесом (спосіб роботи)

✓ Індивідуальна робота

- Самостійне виконання обчислень.
- Повний запис розв'язання.

✓ Робота в парах

- Один учень виконує обчислення.
- Інший перевіряє та пояснює логіку.

✓ Групова робота

- 1 група — основа сцени (паралелепіпед).
- 2 група — циліндр (платформа).
- 3 група — конус (верх сцени).
- 4 група — призма (внутрішній блок).
- Після цього об'єднують результати в загальний об'єм.

3. Диференціація за результатом (кінцевий продукт)

Обов'язковий результат

- Правильно визначені геометричні тіла сцени.
- Обчислений загальний об'єм конструкції.

Додатковий результат

- Міні-презентація «Геометрія концертних сцен».
- 3D-модель сцени (GeoGebra / Tinkercad).
- Інфографіка «Як змінюється об'єм при трансформації сцени».
- Схема сцени з підписаними елементами.

4. Диференціація за рівнем підтримки

Для учнів, яким складно:

- Алгоритм розв'язання:
- Визнач геометричне тіло.
- Запиши формулу.
- Підстав значення.
- Обчисли.
- Додай до загального об'єму.
- Картки-підказки з формулами.
- Візуалізація сцени (малюнок або 3D-модель).
- Покрокове пояснення.

5. Інклюзивний підхід

- Використання об'ємних моделей сцени.
- Візуальна схема конструкції (поділ на частини).
- Усний захист розв'язання (за потреби).
- Поділ задачі на прості кроки.
- Робота з кольоровим виділенням різних геометричних тіл.

Міжпредметна інтеграція:

Інформатика / STEM — комп'ютерне моделювання сцени-трансформера; створення 3D-моделей; використання програм (GeoGebra, Tinkercad); автоматизація обчислень об'ємів; візуалізація сценічної конструкції.

Мистецтво / дизайн — створення сценічного образу; поєднання геометричних форм для досягнення ефектного вигляду; розробка світлових і просторових рішень для концертного шоу.

Математика — використання знань про многогранники та тіла обертання; обчислення об'ємів складених тіл; аналіз залежності об'єму від параметрів (радіуса, висоти, довжини); дослідження змін при трансформації сцени.

Фізика – врахування стійкості конструкції; розподіл маси; центр ваги; навантаження під час руху елементів сцени; вплив матеріалів і освітлення.

Інженерія – проектування сцени-трансформера як складної конструкції; поєднання кількох геометричних тіл; забезпечення безпечної та функціональної трансформації.

Економіка – оцінка витрат на створення сцени; оптимізація розмірів конструкції; ефективне використання матеріалів і ресурсів.

Громадянська освіта – роль концертів і культурних подій у житті міста; вплив сучасних сцен на культурний простір; значення безпеки масових заходів.

Фінансова грамотність – планування бюджету сценічного проєкту; аналіз доцільності змін конструкції (наприклад, збільшення висоти або радіуса елементів).

Екологія – використання екологічних матеріалів; зменшення впливу сценічних конструкцій на довкілля; енергоефективність освітлення та обладнання.

СЦЕНА-ТРАНСФОРМЕР:

ЯК ДОПОМАГАЄ МАТЕМАТИКА?



ОБЧИСЛЮЄМО ОБ'ЄМ СЦЕНИ



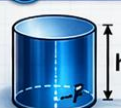
1 ОСНОВА — ПАРАЛЕЛЕПІПЕД



$$V = a \cdot b \cdot h$$

$$V_1 = 14 \cdot 10 \cdot 2 = 280 \text{ м}^3$$

2 ЦИЛІНДР



$$V = \pi r^2 h$$

$$V_2 = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi \approx 113,04 \text{ м}^3$$

3 КОНУС



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V_3 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 15\pi \approx 47,1 \text{ м}^3$$

4 ПРИЗМА (технічний блок)



$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$V_4 = 6 \cdot 4 = 24 \text{ м}^3$$



ЗАГАЛЬНИЙ ОБ'ЄМ:

$$V_{\text{заг}} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 280 + 113,04 + 47,1 + 24$$

464,14 м³

ТРАНСФОРМАЦІЯ СЦЕНИ



Висота циліндра збільшується в 2 рази! (h = 4 м → h = 8 м)

$$V'_{\text{цил}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi \approx 226,08 \text{ м}^3$$

Новий об'єм сцени:

577,18 м³

→ (замість 464,14 м³)



ВИСНОВОК:

- ✓ Сцена складається з геометричних тіл (многогранники + тіла обертання).
- ✓ Об'єм залежить від розмірів: висоти (лінійно) і радіуса (у квадраті)!
- ✓ Геометрія допомагає створювати ефектні та безпечні конструкції!



★ МАТЕМАТИКА — ОСНОВА СУЧАСНИХ ШОУ! ★

2.7. Фінальний акорд: повторення геометрії 9 класу

2.7.1. Дизайн сучасного парку (метод координат)

Авторка: *Лесик Ольга Костянтинівна, вчитель математики Золотоніської гімназії ім. С. Д. Скляренка Золотоніської міської ради Черкаської області*

Активісти громади планують оновити сквер. На цифровій карті (система координат) вхід у парк розташований у точці $A(-2;3)$, а сучасний арт-об'єкт — у точці $B(4;11)$. Команда дизайнерів має прокласти найкоротшу доріжку та знайти місце для кав'ярні точно посередині.

Завдання:



1) Обчисліть довжину доріжки AB .

2) Знайдіть координати точки M (місце для кав'ярні).

3) Складіть рівняння прямої, що проходить через A і B , щоб будівельники могли внести її в GPS-навігатор.

4) Складіть рівняння кола, яке описує

зону покриття Wi-Fi кав'ярні, якщо її радіус 5 одиниць.

Методичні рекомендації для вчителя

1. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

Після виконання задачі учень / учениця:

- обчислює відстань між двома точками на координатній площині;
- знаходить координати середини відрізка;
- складає рівняння прямої, що проходить через дві задані точки;
- складає рівняння кола із заданим центром і радіусом;
- інтерпретує математичні результати в контексті реальної ситуації (урбаністика, дизайн).

2. Перелік компетентностей

- Математична: застосування методу координат для розв'язання прикладних задач.
- Інформаційно-цифрова: моделювання об'єктів на цифровій карті, використання GPS-координат, та робота з цифровими картами.
- Підприємливість та ініціативність: пошук оптимальних рішень для планування міського простору.

- Уміння навчатися впродовж життя: самоконтроль, перевірка результатів і виправлення помилок.

- Компетентності в природничих науках і технологіях: моделювання просторових об'єктів, аналіз розміщення об'єктів, роботу з картами, схемами, планами.

3. Перелік наскрізних вмінь, що формуються (soft skills)

- Критичне та системне мислення: аналіз взаємозв'язків між об'єктами парку (вхід, кав'ярня, арт-об'єкт), датність оцінити, чи є запропонована модель (координати та рівняння) оптимальною для реального будівництва.

- Уміння розв'язувати проблеми: пошук найкоротшої відстані для економії ресурсів під час прокладання доріжки, визначення оптимальної локації для сервісної точки (кав'ярні) так, щоб вона була рівновіддаленою від ключових об'єктів.

- Цифрова грамотність: розуміння принципу роботи GPS-навігації через математичне моделювання (рівняння прямої), використання динамічних геометричних середовищ (наприклад, GeoGebra) для візуалізації проєкту та перевірки точності побудови кола й прямої.

- Комунікація: здатність аргументовано пояснити «замовнику» (вчителю чи класу), чому кав'ярня має бути саме в точці SM , використання фахової термінології (координати, радіус, вектор руху) для чіткої передачі інформації іншим учасникам «дизайнерської групи».

- Ініціативність: проєктування додаткових зон комфорту (наприклад, розрахунок покриття Wi-Fi як конкурентної переваги скверу), готовність пропонувати альтернативні варіанти розміщення об'єктів для покращення інфраструктури громади.

4. Мотивація навчальної діяльності

Уявіть, що ваш клас — це не просто кабінет математики, а проєктне бюро «Smart City». Перед вами лежить план занедбаного пустиря, який ви маєте перетворити на сучасний інтерактивний сквер. У нас є лише дві відмітки на цифровій карті: старий вхід у парк — точка А, і місце, де громада хоче встановити крутий арт-об'єкт — точка В. Маємо допомогти прокласти ідеальну доріжку, розрахувавши її довжину до сантиметра, щоб замовити рівно стільки плитки, скільки потрібно. Запрограмувати GPS-навігатор будівельного катера чи грейдера, перетворивши лінію на карті у математичне рівняння. Знайти "серце" парку — ідеальне місце для кав'ярні, щоб вона була зручно розташована для всіх. І нарешті — маємо «увімкнути» Wi-Fi, окресливши математичним рівнянням зону, де кожен зможе зачеканитися біля нового арт-об'єкта. Ми не просто розв'яжемо вправи, а створимо цифровий код простору, у якому хотіли б жити самі.

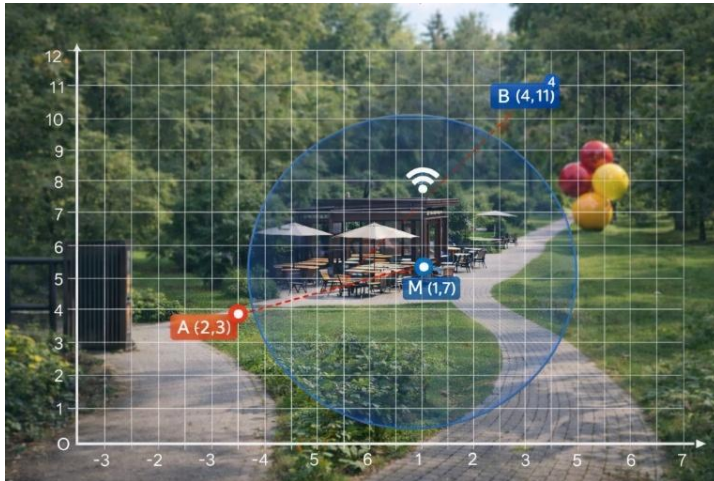
Проблемне запитання: «Як за допомогою координат лише двох об'єктів повністю спроектувати інфраструктуру парку — від розрахунку будматеріалів для доріг до налаштування зони цифрового зв'язку?»

5. Повне розв'язання

Крок 1. Довжина доріжки АВ:

Використовуємо формулу відстані: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$AB = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (11 - 3)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10.$$



Отже, довжина доріжки становить 10 одиниць.

Крок 2. Координати кав'ярні (точка М):

Використовуємо формулу середини відрізка:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x_c = \frac{-2 + 4}{2} = 1, \quad y_c = \frac{3 + 11}{2} = 7$$

Отже, кав'ярня М має координати (1; 7).

Крок 3. Рівняння прямої АВ. Використовуємо формулу: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

$$\frac{x - (-2)}{4 - (-2)} = \frac{y - 3}{11 - 3}$$

$$\frac{x + 2}{6} = \frac{y - 3}{8}$$

$$\frac{x + 2}{3} = \frac{y - 3}{4}$$

$$4(x + 2) = 3(y - 3)$$

$$4x + 8 = 3y - 9$$

$$4x - 3y + 17 = 0$$

Крок 4. Рівняння кола Wi-Fi: Центр кола в точці М(1; 7), R = 5.

Формула: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

$$(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 25.$$

Крок 5. Перевірка зони Wi-Fi. Відстань від М(1; 7) до В(4; 11):

$$MB = \sqrt{(4 - 1)^2 + (11 - 7)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Оскільки відстань дорівнює радіусу ($5 = 5$), арт-об'єкт знаходиться якраз на межі зони покриття.

6. Критерії оцінювання

Рівень / Бали	[MAO 1] Дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів	[MAO 2] Моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язання проблемних ситуацій	[MAO 3] Критичне оцінювання процесу та результату розв'язання проблемних ситуацій
Початковий 1–3 бали	Розпізнає окремі елементи ситуації (точки, радіус), але не формулює проблему або робить це з помилками	Виконує окремі дії за зразком, допускає помилки в побудовах або обчисленнях	Частково перевіряє результат або не пояснює його зміст
Середній 4–6 балів	Розуміє умову задачі, визначає початкову й кінцеву точки, частково пояснює, у чому полягає проблема	Будує модель (точки, прямі, коло), але з неточностями; використовує формули з допомогою вчителя	Перевіряє результат, але пояснення неповне або формальне
Достатній 7–9 балів	Чітко формулює проблему (пошук рівняння прямої та кола), правильно інтерпретує ситуацію	Коректно будує координатну модель, знаходить середини відрізка, відстань між точками та рівняння прямої та кола	Перевіряє логічні зв'язки між умовою задачі та результатом власних обчислень, робить логічний висновок щодо результату
Високий 10–12 балів	Самостійно аналізує ситуацію, формулює проблему та пропонує напрямок її розв'язання	Самостійно моделює ситуацію, пропонує альтернативний маршрут, обґрунтовує вибір	Критично оцінює модель і результат, узагальнює, пояснює практичну цінність

7. Можливі варіанти диференціації

Базовий рівень: учні фокусуються на основних алгоритмах методу координат, будують точки А та В за заданими координатами на папері в клітинку, обчислюють довжину відрізка АВ та координати середини М, використовуючи готові формули-підказки, заповнюють пропуски у рівнянні кола за зразком: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Середній рівень: учні самостійно обирають стратегію розв'язання та аналізують отримані дані, складають рівняння прямої АВ та зводять його до загального вигляду $Ax + By + C = 0$, обчислюють довжину радіуса кола та складають його рівняння без підказок, проводять математичну перевірку, щоб зробити висновок про наявність Wi-Fi біля арт-об'єкта.

Високий рівень: учні використовують метод координат як інструмент для творчого моделювання та оптимізації. Завдання «Інженер-оптимізатор»: Запропонувати зміщення кав'ярні (точки М) у таку позицію, щоб зона Wi-Fi

покривала не лише арт-об'єкт В, а й вхід у парк А. Обґрунтувати зміну координат та записати нове рівняння кола. Завдання «Ландшафтний дизайнер»: Додати на план третій об'єкт (наприклад, дитячий майданчик у точці D) так, щоб трикутник ABD був рівнобедреним. Обчислити координати цієї точки та довести вибір розрахунками. Використовують GeoGebra для створення динамічної моделі парку, де радіус Wi-Fi можна змінювати за допомогою повзунка (слайдера).

8. Міжпредметна інтеграція

Географія: використання координатної сітки для визначення положення об'єктів на місцевості, формування уявлень про маршрут, розміщення та орієнтування.

Інформатика: побудова координатної моделі маршруту в середовищі GeoGebra, алгоритмізація дій (послідовність переміщень), розвиток навичок роботи з цифровими інструментами та перевірки результатів.

Фізика: інтерпретація координат на площині до переміщення об'єкта на місцевості.

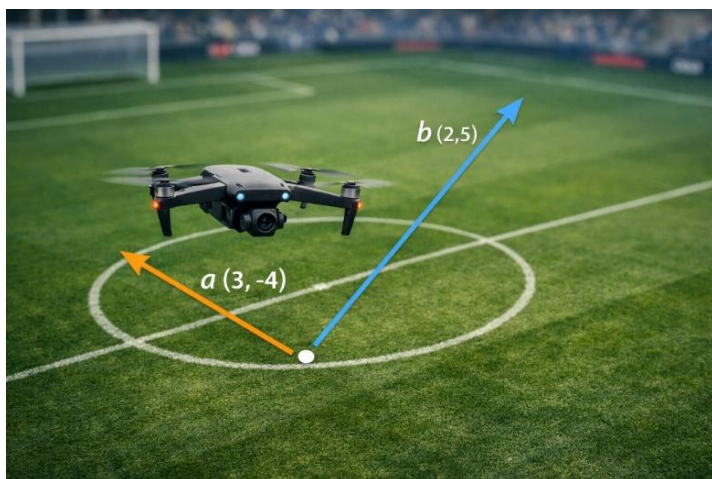
Технології / STEM: моделювання розміщення об'єктів на площині, планування оптимального маршруту, усвідомлення ролі математики в інженерних і технологічних задачах.

Українська мова: коректне використання математичної термінології, формулювання усних і письмових пояснень, робота з точними формулюваннями без орфографічних помилок.

2.7.2. Дрони над футбольним полем

Авторка: *Лесик Ольга Костянтинівна, вчитель математики Золотоніської гімназії ім. С. Д. Скляренка Золотоніської міської ради Черкаської області*

Під час аналізу тактики гри футбольної команди аналітики використовують дані з дрона. Переміщення дрона в просторі (у площині поля)



описується векторами. Це дозволяє точно розрахувати траєкторію польоту та енерговитрати. Перший маневр дрона відповідає вектору $\vec{a}(3; -4)$, а другий – за вектору $\vec{b}(2; 5)$.

Завдання:

- 1) Знайдіть координати сумарного вектора переміщення дрона.
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$
- 2) Обчисліть модуль (відстань) загального переміщення $|\vec{c}|$
- 3) Визначте $\vec{a} \cdot \vec{b}$, щоб зрозуміти взаємозв'язок напрямків.
- 4) Знайдіть косинус кута між напрямками першого та другого маневрів.

Методичні рекомендації для вчителя

1. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ)

Після виконання задачі учень / учениця:

- будує точки та вектори на координатній площині, дотримуючись заданих координат і масштабу;
- визначає координати вектора за координатами його початку і кінця;
- обчислює координати точки після переміщення на заданий вектор;
- додає вектори координатним способом та знаходить результуючий вектор;
- пояснює геометричний зміст додавання векторів на прикладі реальної ситуації;
- використовує цифрові інструменти (GeoGebra) для побудови та перевірки результатів.

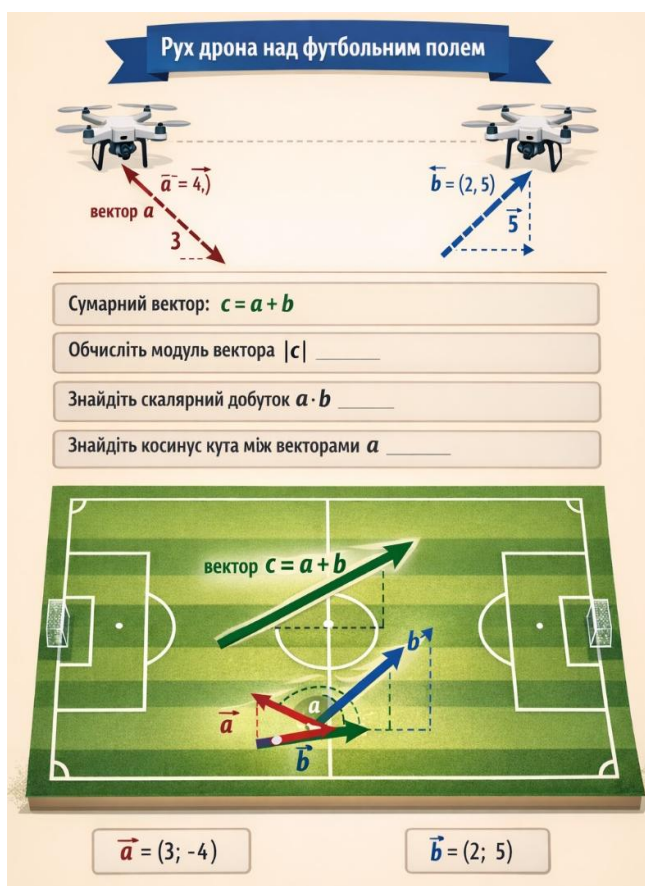
2. Перелік компетентностей, що формуються

- ✓ Математична компетентність: застосування векторів і координат для моделювання реальної ситуації та розв'язування задач.

- ✓ Інформаційно-цифрова компетентність: використання GeoGebra для побудови, дослідження й перевірки математичних моделей.
- ✓ Просторова та логіко-математична компетентності: аналіз і порівняння переміщень на координатній площині.
- ✓ Комунікативна компетентність: пояснення способу розв'язання з використанням математичної мови.
- ✓ Уміння навчатися впродовж життя: самоконтроль, перевірка результатів і виправлення помилок.
- ✓ Підприємливість та ініціативність: пошук оптимального маршруту та пропонування альтернативних рішень.

3. Перелік наскрізних вмінь, що формуються (soft skills)

- Критичне мислення: аналіз правильності побудов, перевірка відповідності координат і результатів.
- Уміння розв'язувати проблеми: пошук оптимального маршруту та альтернативних способів досягнення мети.
- Комунікація: аргументоване пояснення власних дій і висновків.
- Співпраця: робота в парі або групі під час побудови й обговорення результатів.



- Самоорганізація та відповідальність: планування дій, самоперевірка й виправлення помилок.

- Цифрова грамотність: свідоме та доцільне використання цифрових інструментів для навчання.

4. Мотивація навчальної діяльності

Учням пропонується уявити, що вони — технічні директори трансляції фіналу Ліги чемпіонів. У них є дрон, який має знімати переміщення гравців. Але є проблема: заряд акумулятора обмежений, а вітер постійно зносить апарат.

Проблемні запитання: Як розрахувати рух так, щоб дрон не впав на голови вболівальників і

встиг зняти гол? «Як за координатами зрозуміти, що дрон не вилетить за межі стадіону, не вимірюючи відстань рулеткою?»

5. Повне розв'язання

Крок 1. Знаходження координат суми: $\vec{c} = \vec{c}(3 + 2; -4 + 5) = \vec{c}(5; 1)$

Крок 2. Модуль вектора: $|\vec{c}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26} \approx 5,1$ од.

Крок 3. Скалярний добуток: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 5 = 6 - 20 = -14$

Крок 4. Кут між векторами:

Обчислимо модулі $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$; $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \approx 5,38$.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-14}{5 \cdot \sqrt{29}} \approx -0,52$$

Висновок: Оскільки $\cos \varphi < 0$, кут між маневрами є тупим.

6. Критерії оцінювання

Рівень / Бали	[MAO 1] Дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів	[MAO 2] Моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язання проблемних ситуацій	[MAO 3] Критичне оцінювання процесу та результату розв'язання проблемних ситуацій
Початковий 1 – 3 бали	Розпізнає окремі елементи ситуації, але не розуміє проблеми оптимізації маршруту	Зображає окремі вектори з помилками або без зв'язку між ними	Не може пояснити отриманий результат або робить необґрунтовані висновки
Середній 4 – 6 балів	Розуміє умову задачі, визначає, що проблему можна розв'язати за допомогою векторів	Моделює задачу з незначними помилками, виконує додавання векторів	Робить формальний розрахунок без висновків.
Достатній 7 – 9 балів	Самостійно формулює алгоритм знаходження кута та формулює мету розв'язання задачі	Коректно будує векторну модель, обчислює скалярний добуток та косинус.	Обґрунтовано пояснює результат, робить висновки щодо тип кута (тупий/ гострий).
Високий 10 – 12 балів	Аналізує ситуацію, пропонує альтернативні підходи енергоефективності маршруту	Моделює процес без помилки, пропонує або обґрунтовує оптимальні вектори для даної мети	Критично оцінює результат, пов'язує його з реальними наслідками, аргументує власну позицію

7. Можливі варіанти диференціації

Для учнів, які потребують чіткого алгоритму (початковий рівень).

- Побудова векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у системі координат на папері в клітинку (масштаб: 1 клітинка = 1 одиниця). Побудова результуючого вектора за правилом трикутника або паралелограма.

- Використання карток-підказок із пропущеними елементами:

$$\vec{c} = (x_a + y_b; y_a + y_b) = (3 + \dots; -4 + \dots) = (\dots; \dots)$$

- Вимірювання довжини побудованого вектора $\vec{c}$ лінійкою та порівняння її з обчисленим значенням модуля (перевірка точності).

Підтримка: готові формули.

Для учнів, які мають середній та достатній рівень

- Самостійне обчислення скалярного добутку та модуля. Визначення виду кута (гострий/тупий) без побудови, лише на основі знака скалярного добутку.

- Обчислення шляху, який пройшов дрон фізично (сума модулів $|\vec{a}| + |\vec{b}|$), та порівняння його з переміщенням (модуль суми $|\vec{a} + \vec{b}|$).

- Як зміняться координати сумарного вектора, якщо другий маневр $\vec{b}$ буде виконано у протилежному напрямку? (Введення поняття протилежного вектора $-\vec{b}$).

Підтримка: нагадування формули ймовірності випадкової події, правила добутку, опорні запитання.

Для учнів, які мають високий рівень

- Завдання «Енергоефективність»: Припустимо, дрон витрачає енергію пропорційно квадрату модуля вектора переміщення. Доведіть математично, що один прямий переліт за вектором $\vec{c}$ енергоефективніший, ніж послідовні перельоти за $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

- Завдання «Повернення на базу»: Знайдіть координати третього вектора $\vec{d}$, який має виконати дрон після перших двох маневрів, щоб повернутися в початкову точку (місце старту). Доведіть, що $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d} = 0$.

8. Міжпредметна інтеграція

Фізика: Додавання швидкостей та сил: Вектор переміщення дрона розглядається як результат дії кількох факторів. Наприклад, вектор власної швидкості двигунів плюс вектор швидкості вітру.

Географія: Учні вчать розуміти, як цифрові карти (Google Maps, Waze) прокладають маршрути, додаючи тисячі мікро-векторів між GPS-точками. Вплив повітряних потоків. Вектор вітру додається до вектора курсу літака чи дрона, що пояснює, чому шлях «туди» і «назад» може тривати різний час при однаковій потужності двигуна.

Інформатика та Робототехніка: Усі об'єкти у відеоіграх (гравці у FIFA, снаряди, камери) рухаються за допомогою векторів. Скалярний добуток використовується для розрахунку освітлення об'єктів та визначення поля зору (Field of View) штучного інтелекту. Складання логічних умов для польотного контролера (Flight Controller).

Фізична культура: Використання векторів для побудови «теплових карт» гравців. Аналітики розраховують вектори передач (пасу): чим більший скалярний добуток вектора бігу гравця та вектора польоту м'яча, тим ефективнішою є атака (гравець отримує м'яч «на хід»).

Технології та Дизайн (STEM): Використання векторів у верстатах із ЧПК (числовим програмним керуванням) або 3D-принтерах, де головка екструдера рухається за заданими векторами координат. Налаштування

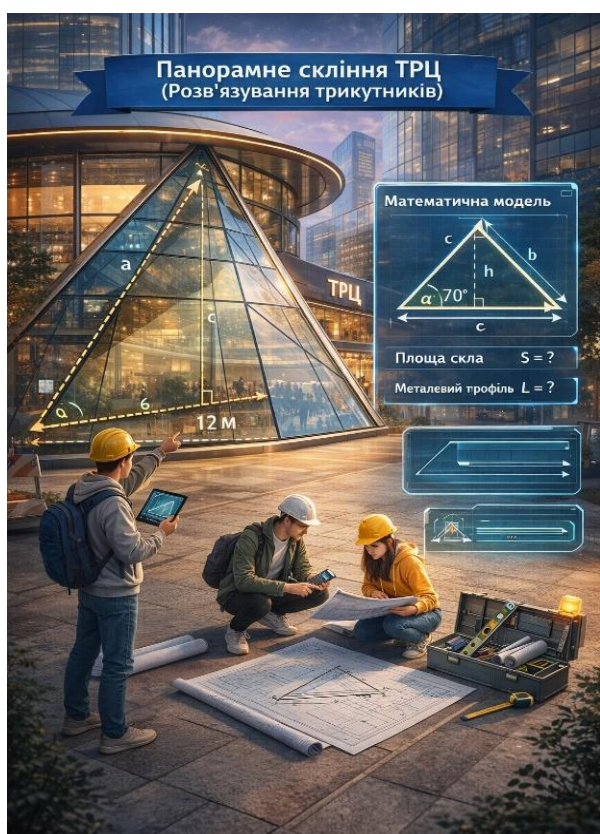
гіроскопів. Учні розуміють, що датчик фіксує відхилення (вектор помилки) і система автоматично генерує протилежний вектор для вирівнювання дрона.

Українська мова: Розвиток вміння чітко формулювати технічні звіти. Вживання правильних відмінкових форм: «модуль вектора (кого? чого?) суми», «дорівнює (чому?) скалярному добутку». Побудова логічного ланцюжка висновків: «Оскільки значення косинуса від'ємне, ми можемо стверджувати, що напрямок руху змінився на протилежний бік відносно початкової осі».

2.7.3. Панорамне скління ТРЦ (Розв'язування трикутників)

Авторка: *Лесик Ольга Костянтинівна, вчитель математики Золотоніської гімназії ім. С. Д. Скляренка Золотоніської міської ради Черкаської області*

Шкільна команда з архітектурного гуртка досліджує проєкт нового торгово-розважального центру. Одним із найскладніших елементів є трикутна панорамна вітрина.



Учні помітили, що для стійкості конструкції важливо точно розрахувати площу скла та довжину металевого профілю. Якщо розрахунки будуть неточними, скло не витримає вітрового навантаження або профіль виявиться заважким. Для аналізу результатів потрібно побудувати математичну модель трикутної панелі.

Математична модель: позначимо сторони трикутної панелі як a та b , а кут між ними як γ . За експериментальними даними архітекторів маємо що сторона $a=8$ м, сторона $b=10$ м, кут між ними $\gamma=60$.

Завдання

- 1) Поясни, чому для знаходження третьої сторони доцільно використовувати теорему косинусів.
- 2) Визнач довжину металевого профілю для третьої сторони панелі.
- 3) Обчисли площу скла, необхідного для цієї вітрини.
- 4) Знайдіть радіус декоративного кола підсвітки, в яке вписана ця панель.
- 5) Зроби висновок, чи достатньо замовити 25 м профілю для всієї рами трикутника.

Методичні рекомендації для вчителя

1. Очікувані результати навчання (згідно з НУШ):

Після виконання задачі учень / учениця:

- Оперує математичними моделями: перекладає реальну архітектурну конструкцію мовою геометрії (трикутник із заданими параметрами).

- Застосовує тригонометричний апарат: вільно використовує теорему косинусів для знаходження невідомої сторони та теорему синусів для розрахунку параметрів описаного кола.

- Обчислює площу складних поверхонь: використовує формулу $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ для визначення витрат матеріалів.

- Аналізує та прогнозує: здійснює оцінку достатності ресурсів (профілю) на основі отриманих розрахунків.

- Використовує цифрові інструменти: перевіряє точність архітектурного проекту за допомогою динамічної геометрії (GeoGebra).

- Аргументує вибір: обґрунтовує доцільність застосування конкретної теореми залежно від наявних вихідних даних.

2. Перелік компетентностей, що формуються:

- ✓ Математична: розв'язування трикутників, робота з ірраціональними числами та тригонометричними таблицями/калькулятором.

- ✓ Інформаційно-цифрова: моделювання архітектурних об'єктів у графічних середовищах; розуміння того, як інженерне ПЗ (AutoCAD, ArchiCAD) використовує геометричні алгоритми.

- ✓ Екологічна та здоров'я: розуміння важливості точності розрахунків для безпеки людей (стійкість до вітрового навантаження) та енергоефективності (щільність прилягання профілю).

- ✓ Підприємливість та фінансова грамотність: раціональне використання ресурсів, мінімізація залишків дороговартісних матеріалів (скла та металу), запобігання дефіциту матеріалів під час закупу.

- ✓ Компетентності в природничих науках і технологіях: розуміння жорсткості трикутної конструкції як основи сучасної архітектури та інженерії.

3. Перелік наскрізних умінь (soft skills)

- Критичне мислення та системний аналіз: здатність оцінити ризики: учень розуміє, що математична помилка в розрахунку сторони призведе до фізичної неможливості змонтувати вітрину.

- Уміння розв'язувати проблеми: пошук виходу з дефіциту ресурсів: що робити, якщо профіль не вистачає (корекція проекту чи дозакупівля?), обґрунтування, чому саме теорема косинусів є «ключем» до розв'язання цієї конкретної ситуації.

- Цифрова грамотність: використання калькуляторів та спеціалізованого софту (GeoGebra) не як «шпаргалки», а як інструменту для професійної перевірки гіпотез, розуміння точності цифрових даних (округлення до сотих чи тисячних у будівництві).

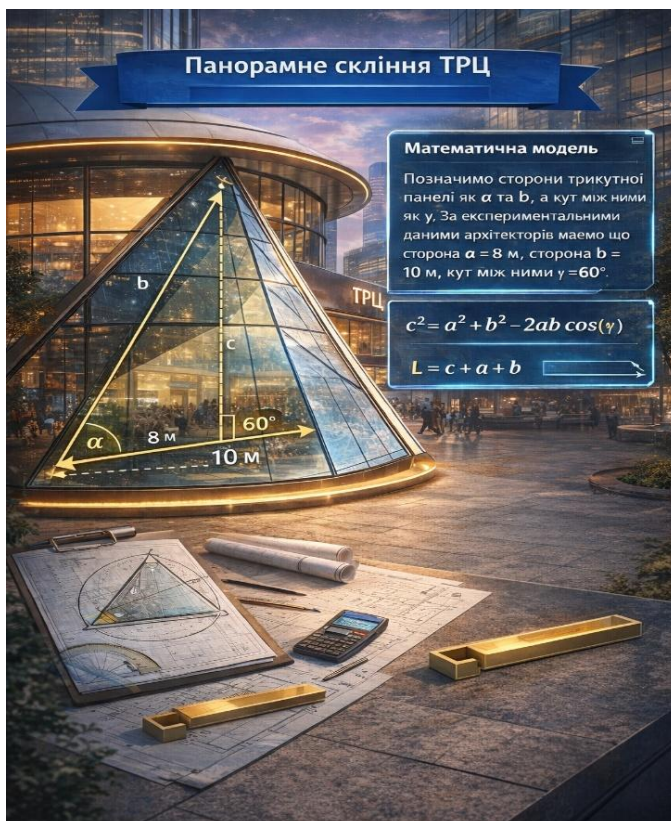
- Комунікація та командна робота: вміння презентувати результати «замовнику» (вчителю або групі): перетворення цифр у переконливі аргументи, використання професійної термінології для чіткої взаємодії в групі «архітекторів» та «постачальників».

- Підприємливість та фінансова грамотність: розрахунок кошторису: розуміння того, що кожен зайвий метр профілю — це додаткові витрати, а кожна помилка — збитки, врахування технічних втрат матеріалу під час монтажу.

- Навчання впродовж життя: усвідомлення зв'язку між шкільною програмою та майбутньою професією інженера, архітектора чи дизайнера, здатність самостійно шукати необхідні формули або значення функцій для розв'язання нестандартної ситуації.

4. Мотивація навчальної діяльності

Уявіть, що ви — провідні інженери великої будівельної компанії. Перед вами креслення фасаду майбутнього символу міста — ТРЦ.



Архітектор запропонував сміливе рішення: гігантську трикутну вітрину. Проте краса вимагає точності. Якщо ви помилитеся в розрахунках хоча б на 5 сантиметрів:

- Профіль не зійдеться: металева рама просто не замкнеться, і дорогу конструкцію доведеться відправляти на переплавку.

- Скло трісне: неправильно розрахована площа призведе до того, що під власною вагою або тиском вітру скло випаде з рами.

- Фінансові втрати: замовити забагато профілю — це марнотратство, замовити

замало — зупинка всього будівництва.

Сьогодні ми доведемо, що геометрія — це не просто вправа в зошиті, а гарантія безпеки та успіху багатомільйонного проєкту.

Проблемне запитання: «Як знайти баланс між архітектурною естетикою та інженерною точністю: чи дозволить нам знання лише двох сторін та кута повністю проконтролювати закупівлю матеріалів та безпеку всієї фасадної конструкції?»

5. Повне розв'язання:

Крок 1. Теорема косинусів доцільна, оскільки відомі дві сторони та кут між ними (випадок СКС). Теорема косинусів: застосовується, коли відомі дві сторони й кут між ними. Довжина третьої сторони (c):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$c^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ$$

$$c^2 = 64 + 100 - 160 \cdot 0,5 = 164 - 80 = 84$$

$$c = \sqrt{84} \approx 9,17 \text{ м.}$$

Крок 2. Площа скла (S):

$$S = \frac{1}{2} ab \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \approx 34,64 \text{ м}^2.$$

Крок 3. Радіус підсвітки (R). За наслідком з теореми синусів:

$$R = \frac{c}{2 \sin \gamma}$$

$$R = \frac{\sqrt{84}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{3}} = \sqrt{28} \approx 5,29 \text{ м.}$$

Крок 4. Висновок про профіль. Периметр $P = a + b + c = 8 + 10 + 9,17 = 27,17$ м. Оскільки $27,17 > 25$, 25 метрів профілю недостатньо.

6. Критерії оцінювання

Рівень / Бали	[MAO 1] Дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів	[MAO 2] Моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язання проблемних ситуацій	[MAO 3] Критичне оцінювання процесу та результату розв'язання проблемних ситуацій
Початковий 1 – 3 бали	Розпізнає трикутник у конструкції, але не може пов'язати його елементи з формулами.	Записує окремі формули (периметр, площа), але робить грубі помилки в обчисленнях.	Не може зробити висновок про достатність матеріалів.
Середній 4 – 6 балів	Розуміє, що задача зводиться до розв'язування трикутника, знає назви теорем.	Обчислює третю сторону за теоремою косинусів з допомогою вчителя або підказки.	Робить висновок про профіль («вистачить/не вистачить») без розгорнутого пояснення.
Достатній 7 – 9 балів	Самостійно обґрунтовує вибір теореми косинусів, виходячи з умови задачі.	Коректно обчислює сторону, площу та радіус, використовуючи тригонометричні таблиці.	Порівнює отриманий периметр із заданою кількістю профілю (25 м) і робить правильний висновок.
Високий 10 – 12 балів	Аналізує архітектурну модель, пропонує способи перевірки точності результату.	Самостійно розв'язує задачу, оперує ірраціональними числами, демонструє високу точність.	Критично оцінює реальні умови (запас на обрізку скла, товщину профілю), узагальнює практичну цінність геометрії.

7. Можливі варіанти диференціації

Для учнів, які потребують чіткого алгоритму (початковий рівень).

Учням надається картка-схема з готовими формулами, куди потрібно підставити значення $a=8$, $b=10$, $\gamma = 60^\circ$. Завдання фокусується на правильному використанні калькулятора та базових навичках множення.

Підтримка: готові формули.

Для учнів, які мають середній та достатній рівень

Учні самостійно обирають формули. Додатково їм пропонується перевірити результат за теоремою синусів (знайти кути α та β і впевнитися, що їх сума з γ дорівнює 180°).

Підтримка: нагадування, що радіус описаного кола пов'язаний із будь-якою стороною та протилежним кутом через теорему синусів.

Для учнів, які мають високий рівень.

«Оптимізація кошторису»: Скло продається листами по 10 м^2 . Скільки цілих листів треба замовити, враховуючи, що 15% іде в обрізки?

«Стійкість»: Як зміниться довжина профілю та площа, якщо кут γ збільшити до 90° ? Чи стане конструкція дорожчою?

Цифрова лабораторія: Побудувати модель вітрини в GeoGebra, де за допомогою повзунків можна змінювати кут γ і бачити, як динамічно змінюється площа та радіус описаного кола.

8. Міжпредметна інтеграція

- Технології / Дизайн: Вивчення властивостей трикутника як найжорсткішої геометричної фігури (принцип ферм у будівництві). Учні дізнаються, чому панорамні вікна часто мають саме трикутну або сегментарну форму.

- Фізика (Оптика та Механіка): Розрахунок кута падіння сонячних променів на скло (тригонометрія допомагає визначити рівень затінення приміщення). Аналіз вітрового тиску на площину скла (площа S , яку обчислили учні, напряму впливає на силу тиску $F = p \cdot S$).

- Географія: Метод тріангуляції — як за допомогою трикутників та теорем синусів/косинусів створюються точні карти місцевості та вимірюються відстані до недоступних об'єктів.

- Економіка та Основи підприємництва: Складання міні-кошторису. Учні вчать розуміти поняття «похибка» та «запас матеріалу», що є критично важливим для успішного бізнесу в будівельній сфері.

- Мистецтво / Архітектура: Ознайомлення з роботами видатних архітекторів (наприклад, Нормана Фостера чи Захи Хадід), які активно використовують трикутні скляні структури у своїх футуристичних проєктах.

- Інформатика: Використання електронних таблиць (Excel/Sheets) для автоматизації розрахунків: створення файлу, який при зміні вхідних даних (a , b , γ) миттєво перераховує площу та периметр.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра : підручник для 9 класу закладів загальної середньої освіти. Київ : Освіта, 2022. 288 с.
2. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Геометрія : підручник для 9 класу закладів загальної середньої освіти. Київ : Освіта, 2022. 272 с.
3. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Методика навчання математики в основній школі. Київ : Педагогічна думка, 2018. 256 с.
4. Величко С. П. Формування просторового мислення учнів у процесі вивчення стереометрії // Математика в школі. 2021. № 3. С. 12–18.
5. Державний стандарт базової середньої освіти : затв. постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 р. № 898. Київ, 2020.
6. Істер О. С. Алгебра : підручник для 9 класу. Київ : Генеза, 2022. 304 с.
7. Істер О. С. Геометрія : підручник для 9 класу. Київ : Генеза, 2022. 256 с.
8. Крамаренко Т. Г. Компетентнісний підхід у навчанні математики // Математика в сучасній школі. 2020. № 6. С. 2–8.
9. Литвиненко О. М. STEM-підхід у викладанні алгебри та геометрії // Педагогіка і психологія. 2021. № 4. С. 45–50.
10. Математика. Навчальна програма для 5–9 класів закладів загальної середньої освіти (оновлена відповідно до Державного стандарту базової середньої освіти 2020 р.). Київ : МОН України, 2022.
11. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підручник для 9 класу. Харків : Гімназія, 2022. 304 с.
12. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : підручник для 9 класу. Харків : Гімназія, 2022. 288 с.
13. Нова українська школа : концептуальні засади реформування середньої школи. Київ : МОН України, 2016. 40 с.
14. Поліщук О. П. Формування ключових компетентностей учнів на уроках математики // Освіта України. 2022. № 8. С. 14–18.
15. Савченко О. Я. Дидактика сучасної школи : теорія і практика. Київ : Генеза, 2019. 368 с.
16. Тарасенкова Н. А. Розвиток математичної компетентності учнів основної школи // Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія «Педагогічні науки». 2021. № 15. С. 73–79.